Fonctions réelles de deux variables réelles

Ce qu'il faut connaître :

-la définition des deux applications partielles associées à une fonction de deux variables
-la définition des deux dérivées partielles premières d'une fonction
-la définition du gradient d'une fonction en un point (a,b) de $\mathbb{R}^2$
-la définition d'un point critique
-les dérivées partielles d'une fonction composée $t \mapsto f(x(t),y(t))$
-la définition d'un maximum et d'un minimum relatif ou global d'une fonction
-la définition des dérivées partielles secondes d'une fonction

1. Comment déterminer la courbe de niveau c d'une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$

On détermine l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $(x,y) \in \mathcal{D}$ et $f(x,y) = c$

2. Comment justifier qu'une fonction f est continue sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$

-on utilise les théorèmes sur les opérations de fonctions continues en tout point où cela est possible
-en un point (a,b) où les théorèmes ne s'appliquent pas, on calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ et on compare à $f(a,b)$

- **a.** pour cela, on pose $h = x - a,\ k = y - b$ et on utilise des encadrements ou des majorations
- **b.** on utilise très souvent le changement de variables en polaires : $x = a + r\cos\theta$ et $y = b + r\sin\theta$
  On a alors : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$

3. Comment justifier qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$

-on utilise les théorèmes sur les opérations de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où cela est possible
-en un point (a,b) où les théorèmes ne s'appliquent pas, on montre que :
- f est continue en (a,b)
- f admet des dérivées partielles en (a,b) : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x}$ et $\lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(a,y) - f(a,b)}{y}$ existent
- les deux dérivées partielles de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sont contiunues en (a,b)

4. Comment calculer les dérivées partielles d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$

-en tout point où les théorèmes s'appliquent, on fixe une variable et on dérive par rapport à l'autre
-en un point où les théorèmes ne s'appliquent pas, on utilise la limite des taux d'accroissements (cf 2.)

5. Comment calculer les dérivées partielles secondes d'une fonction f de deux variables

- on calcule les deux dérivées partielles premières
- on calcule les deux dérivées partielles de chacune des dérivées partielles premières

De plus, en tout point où f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

6. Comment déterminer les extrema relatifs d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$

-on recherche les points critiques de f, c'est-à-dire les points (a,b) de $\mathcal{D}$ tels que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

-en chacun de ces points (a,b), on étudie le signe de $f(x,y) - f(a,b)$ au voisinage de (a,b)
pour cela, on pose $h = x - a,\ k = y - b$ et on utilise des encadrements ou des majorations
pour étudier le signe de $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ au voisinage de $(0,0)$