TD 18 : fonctions de deux variables

1 Préliminaires géométriques

$\boxed{1}$ Représenter les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$:

1. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad x \geq 0 \quad y \geq x\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad x \geq 1 \quad y \geq 0 \quad y + x \leq 3\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad y \geq 0 \quad x^2 + y^2 \geq 1\}$
5. $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \left\{ \begin{array}{lll} 3y + x - 12 & \leq & 0 \\ 3x + y - 12 & \leq & 0 \end{array} \right.\right\}.$

2 Premiers calculs

$\boxed{2}$ Calculer les dérivées partielles des fonctions et tracer leur domaine de définition :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3 y + y^2 x}{x + y}$.
2. $f(x,y) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$.
3. $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{x^2 + y^2 - 9}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.
5. $f(x,y) = \sqrt{xy}$

$\boxed{3}$ Soit f et g les fonctions défines par :

$$f : (x,y) \longmapsto x \ln y + y^2 \sin x$$
$$g : t \longmapsto f(t^3, t^2).$$

Donner l'ensemble I sur lequel g est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer $g'(t)$ pour t dans I.

3 Équations aux dérivées partielles

$\boxed{4}$ Soit $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur E et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{array} \right.$$

4 Points critiques

$\boxed{5}$ Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$.

$\boxed{6}$ Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$.

$\boxed{7}$ Soit a, b, c soit réels tels que $(a,c) \neq (0,0)$. On considère la fonction q définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$q(x,y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy.$$

On définit également le sous-ensemble S de $\mathbf{R}^2$ par : $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad x^2 + y^2 = 1\}$. Enfin, on définit sur $I = [0, 2\pi]$ la fonction φ par : $\varphi(t) = q(\cos t, \sin t)$.

1. Justifier que φ admet un minimum m et un maximum M absolus sur l'intervalle I.
   En déduire que $q(S) = [m, M]$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $f(x,y) = q(x,y) - m\|X\|^2$ où $X = (x,y)$.
   Montrer que :
   $$\forall X \neq (0,0) \quad f(x,y) = \|X\|^2 f\left(\frac{X}{\|X\|}\right).$$
3. En déduire que f est positive sur $\mathbf{R}^2$.
4. Calculer les dérivées partielles de f.

5 Système différentiel

$\boxed{8}$ On considère le système d'équations différentielles

$$(E) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -x + x^3 \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions dérivables de la variable réelle t.

1. Identifier les solutions constantes de (1).

   On considère maintenant la fonction V des variables réelles x et y définie par $V(x, y) = x^2 + y^2 - \dfrac{x^4}{2}$.
2. Calculer les dérivées partielles de V et déterminer les points pour lesquels le gradient est nul.
3. Montrer que si (x, y) est un couple solution de (1) sur $\mathbb{R}$ alors la fonction composée $t \mapsto V(x(t), y(t))$ de la variable t est constante.
4. On considère la solution (x, y) de (1) qui obéit à la condition initiale $x(0) = 0$ et $y(0) = 1/\sqrt{2}$. Préciser $V(x, y)$. Exprimer ensuite y en fonction de x.
5. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$ sur $] - 1; 1[$, et en déduire la solution (x, y) définie en **5**.
6. Tracer ensuite les graphes de x et y.