1. On peut noter que dans cette partie, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $X_n(\Omega) = [\![0,2]\!]$, en particulier la famille $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ forme un système quasi-complet d'événements (noté SQCE).
Soit j dans $[\![0,2]\!]$.
En appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $([X_{n+1} = j])$ avec le système quasi-complet d'évènements cité, on a :

$$P(X_{n+1} = j) = P(X_{n+1} = j | X_n = 0)P(X_n = 0) + P(X_{n+1} = j | X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = j | X_n = 2)P(X_n = 2).$$

Ces relations se réécrivent par définition du produit matriciel :

$$V_{n+1} = MV_n \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 0|X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 2|X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

En utilisant les données de l'énoncé : $\forall (i,j) \in [\![0,2]\!]^2, \quad P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \binom{2}{j} \left(\frac{i}{2}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2}\right)^{2-j}$,

d'où $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac14 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac14 & 1 \end{pmatrix}$ en se souvenant que $0^0 = 1$.

2. En notant (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$,la lecture de M donne que $ME_1 = E_1$ ainsi que $ME_3 = E_3$. Ce qui prouve que 1 est valeur propre de M, avec un sous-espace propre de dimension au moins 2 puisque $(E_1.E_3)$ est une famille libre en tant que sous-famille d'une base.
Cherchons ensuite une autre valeur propre de M. soit $\lambda \neq 1$ et considérons
$M_\lambda = M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac14 & 0 \\ 0 & \frac12 - \lambda & 0 \\ 0 & \frac14 & 1-\lambda \end{pmatrix}$. On voit immédiatement que si $\lambda = 1/2$, le rang de M_λ n'est pas 3, donc $1/2$ est aussi valeur propre, et le sous-espace propre associé $\mathscr{E}_{1/2}$ est de dimension au moins 1. Comme la somme des dimensions des deux s-ev propres que l'on a trouvé fait au moins 3, et que M est de taille 3×3, on en déduit que M est diagonalisable et que $\mathscr{E}_{1/2}$ est de dimension 1. Cherchons une base de $\mathscr{E}_{1/2}$: tout vecteur U non nul vérifiant $MU = \dfrac12 U$ constitue une base de $\mathscr{E}_{1/2}$. Or on constate que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient, et comme la juxtaposition de bases des sous-espaces propres d'une matrice diagonalisable est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, en posant : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $D = \text{diag}(1,1,1/2)$, alors P est inversible et diagonalise M par $P^{-1}MP = D$.

3. Par décrémentations successives : $V_n = MV_{n-1} = M^2 V_{n-2} = \cdots = M^n V_0$.

4. **a)** D'après la relation précédente, l'égalité des coefficients des matrices V_n et $M^n V_0$ donne, en posant $\tau_n = 2^{-n}$:
— $P(X_n = 0) = P(X_0 = 0) + \dfrac{1-\tau_n}{2} P(X_0 = 1)$.
— $P(X_n = 1) = \tau_n P(X_0 = 1)$.
— $P(X_n = 2) = \dfrac{1-\tau_n}{2} P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2)$.

Comme on a des variables finies, les questions de convergence de l'espérance ne se posent pas et en utilisant les relations qui précèdent, après simplifications, il vient :
$E(X_n) = P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) = P(X_0 = 1) + 2P(X_0 = 2) = E(X_0)$.
En termes de modèle, cela signifie que d'une génération à l'ordre, puisque l'effectif de la population est constant, les fréquences alléliques moyennes restent constantes.

b) On considère d'abord : $P(X_n = 1) = \tau_n P(X_0 = 1)$ d'après **4.a)**. Comme $\tau_n = o(1)$, il suit que $P(X_n = 1) = o(1)$, $n \to \infty$. Comme par ailleurs, $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ forme un système quasi-complet d'événements, par complémentaire, on a $\lim_{n\to\infty} P(X_n \in \{0, 2\}) = 1$.
En termes de génotypes, il est quasi-certain en temps long que l'on ait que des homozygotes AA ou aa.

5. **a)** Soit $i \in [\![0, 2N]\!]$. En posant $p_i = i/2N$ on constate que S_i n'est rien d'autre que l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(2N, p_i)$. On en conclut que $S_i = 2Np_i = i$.

b) Soit $j \in \{0, \dots, 2N\}$ la formule des probabilités totales avec le sqce associé à X_n donne :

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{2N} P(X_{n+1} = j | X_n = i)P(X_n = i) = \sum_{i=0}^{2N} \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j} P(X_n = i).$$

c) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $E(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{2N} jP(X_{n+1} = j)$, en substituant dans cette dernière somme l'expression de **5.b**, il vient :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{2N} j \sum_{i=0}^{2N} \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j} P(X_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j} P(X_n = i) \text{ car on peut permuter les sommes} \\ &= \sum_{i=0}^{2N} S_i P(X_n = i) \overset{\textbf{5.a}}{=} \sum_{i=0}^{2N} iP(X_n = i) = E(X_n). \end{aligned}$$

6. **a)** Pour deux évènements A, B tels que $B \supset A$, et $P(A) \neq 0$, on a par définition de probabilité conditionnelle : $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = P(A)/P(A) = 1$, donc les deux probabilités à calculer valent 1.

b) Soit $k \in \{1, \dots, 2N - 1\}$. Par additivité finie, et avec les notations de **5.a)** :

$$\begin{aligned} P(H_{n+1} | X_n = k) &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = k) + P(X_{n+1} = 2N | X_n = k) \\ &= \binom{2N}{0} p_k^0 (1 - p_k)^{2N} + \binom{2N}{2N} p_k^{2N} (1 - p_k)^0. \\ &= (1 - p_k)^{2N} + p_k^{2N}. \end{aligned}$$

Comme $k \geq 1$, $p_k \geq 1/2N$. Comme $1 - p_k = (2N - k)/2N \geq 1/2N$, car $2N - k \geq 1$. D'où le résultat.

c) Appliquons la formule des probablités totales avec le sqce associé à la variable X_n :

$$P(H_{n+1}) = \sum_{k \in \{0, 2N\}} P(H_{n+1} | X_n = k)P(X_n = k) + \sum_{0<k<2N} P(H_{n+1} | X_n = k)P(X_n = k).$$

En utilisant les résultats de **6b)** et **6a)**, on obtient :

$$P(H_{n+1}) \geq P(H_n) + \sum_{0<k<2N} 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} P(X_n = k).$$

Encore par additivité finie, et linéarité de la somme :

$$P(H_{n+1}) \geq P(H_n) + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} P(X_n \in \{1, \dots 2N-1\}),$$

mais l'évènement $X_n \in \{1, \dots 2N-1\}$ est par définition $\overline{H_n}$, dont la probabilité est $1 - u_n$. D'où le résultat.

d) La suite (w_n) est arithmético-géométrique, de raison $1-\alpha$. La méthode classique nous donne que le terme général vaut $w_n = (1-\alpha)^n(u_0 - 1) + 1$. Comme $|1-\alpha| < 1$, $w_n = 1 + o(1)$ quand $n \to \infty$ par somme de limites.

e) Si l'on choisit $\alpha = 2\left(\frac{1}{2N}\right)$, qui sera noté $\alpha^\star$ dans ce qui suit, on a, en reprenant le résultat de a question **6c)**, à tout rang n : $u_{n+1} \geq u_n + \alpha^\star(1-u_n)$. Comme u_n est une probabilité, $u_n \leq 1$ pour tout entier n. Montrons ensuite par récurrence que pour tout entier n, $w_n \geq u_n$. Au rang $n = 0$, c'est une hypothèse de l'énoncé. Maintenant, si à un rang n donné, $u_n \geq w_n$, alors $u_{n+1} \geq (1-\alpha^\star)u_n + \alpha^\star \geq (1-\alpha^\star)w_n + \alpha^\star$ car $1 - \alpha^\star \geq 0$ et par hypothèse de récurrence. Comme $(1-\alpha^\star)w_n + \alpha^\star = w_{n+1}$, cela donne l'hérédité et le résultat.

f) Comme $N \geq 1$, $(1/2N) \leq 1/2$ et $0 < (1/2N)^{2N} \leq 1/4 < 1/2$. Cela prouve que l'on a $\alpha^\star \in]0, 1[$. Le résultat de **6d)** s'applique ainsi que celui de **6e)**. Il suit par le théorème des gendarmes la suite u converge bien vers 1 : la population devient quasi-certainement constituée uniquement d'individus homozygotes en temps long.

7. **a)** L'épreuve qui consiste à regarder si un individu donné est de type 1 est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès $p_1 = P(T_k = 1)$. Comme la variable N_1 compte le nombre de succès lors de N répétitions mutuellement indépendantes de cette épreuve, on déduit que N_1 suit une loi $\mathscr{B}(N, p_1)$.

b) D'après le cours, $E(N_1) = Np_1$, et $V(N_1) = (1-p_1)E(N_1) = Np_1(1-p_1)$.

c) Comme $N_1 + N_2 = N - N_3$, d'après les propriétés fonctionnelles de la variance,
$V(N_1 + N_2) = V(N_3) = Np_3(1-p_3)$, puisque la variable N_3 est binomiale

d) D'après la formule d'Al-Kahsi, $V(N_1 + N_2) = V(N_1) + V(N_2) + 2\mathrm{Cov}(N_1, N_2)$. Comme les variables N_j sont binomiales de paramètres (N, p_j) (*cf.* **7a)**), on trouve que :
$\mathrm{Cov}(N_1, N_2) = \frac{N}{2}\left((1-p_1-p_2)(p_1+p_2) - p_1(1-p_1) - p_2(1-p_2)\right) = -Np_1p_2$.

8. **a)** On demande d'étudier $\lim\limits_{n\to\infty} P(N_1^\star \in [-a, a])$ où $N_1^\star$ est la variable déduite de N_1 par centrage-réduction d'après **7b)**. Comme N_1 suit une loi binomiale, d'après le théorème de Moivre-Laplace, $P(N_1^\star \in [-a, a])$ converge vers $P(Z \in [-a, a])$ où Z suit une loi normale centrée-réduite. Ainsi la limite vaut $\Phi(a) - \Phi(-a)$.

b) D'après les quantiles de la loi normale centrée-réduite, il suffit de choisir $a = u_{0,975} = 1,96$.

9. **a)** Par symétrie de la covariance, la matrice W est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral, et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

b) C'est évident par la formule d'Al-Kashi et la définition du produit matriciel, en considérant qu'une matrice 1×1 est un réel.

c) Soit λ une valeur propre de W et $U = (a, b)^\top$ un vecteur propre associé. Il est en particulier non nul. D'une part, pour précisément ces scalaires (a, b), on a $V(aN_1 + bN_2) \geq 0$. Mais d'autre part, $V(aN_1 + bN_2) = U^\top WU = U^\top \lambda U = \lambda U^\top U = \lambda \|U\|^2$, donc $\lambda \|U\|^2 \geq 0$. Comme $\|U\|^2 > 0$ car U est non nul, on en déduit $\lambda \geq 0$.

Montrons enfin que λ ne peut être nul. Si c'était le cas, la variable aléatoire $C = aN_1 + bN_2$ est quasi-certaine car de variance nullle. Lorsque le couple (N_1, N_2) prend la valeur $(0, 0)$, la variable C prend la valeur 0. Lorsque le couple (N_1, N_2) prend la valeur $(1, 0)$, C prend la valeur a, et enfin lorsque l'évènement $[N_1 = 0, N_2 = 1]$ est observé, C prend la valeur b. Comme tous ces évènements ne sont pas quasi-impossibles, cela donne $a = b = 0$, et contredit le fait que U est vecteur propre.

d) Considérons une base orthonormée $\mathscr{B}$ de vecteurs propres de W (son existence est garantie par orthogonalité des sous-espaces propres). La matrice de passage P de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ à cette base $\mathscr{B}$ vérifie $P^{-1} = P^\top$, et diagonalise P en $P^\top WP = \Delta$, où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ étant les valeurs propres de W. Soit $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda}, \sqrt{\mu})$, qui existe bien. Comme D est de rang 2, elle est inversible, et on a bien $W = PD^2P^{-1}$.

10. Remarquons que $A^\top = {P^{-1}}^\top {D^{-1}}^\top = PD^{-1}$. Calculons :

$$AWA^\top = D^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PD^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I_2.$$

On en déduit que :

$$V(Y_1) = V(Y_2) = 1 \text{ et } \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0.$$