TD Algèbre linéaire

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(3) = P(4) = 0\}$

a. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$, en déterminer base et dimension.

b. Montrer alors que la réunion des bases de F et de G est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Écrire une fonction Python d'argument une liste $L = [a,b,c,d]$ qui renvoie `True` si le polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ appartient à F, `False` sinon.

2. Soit $E = \{f : x \mapsto (ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$

a. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie. En donner une base $\mathcal{B}$ et la dimension.

b. Soit d l'application définie sur E par : $\forall f \in E,\ d(f) = f'$.
Montrer que d est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

c. Montrer que M est inversible.

d. En utilisant la fonction `inv` de la méthode `Linear algebra` du module `numpy` (`numpy.linalg.inv()`), calculer M^{-1}.

e. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3xe^{2x} - (5x-1)e^{-2x}$.

3. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur E par $f(M) = MA$.

a. On représente sous Python, la matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ par la liste $M = [[x,y],[z,t]]$.

Écrire une fonction d'argument une liste représentant M qui renvoie la liste représentant $f(M)$.

b. Montrer que f est un endomorphisme de E.

c. Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

4. Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et s l'application définie sur E par : $\forall P \in E,$ si $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ alors $s(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

a. Dans cette question, on pose $n = 1$.

i. Écrire une fonction d'argument une liste représentant P qui renvoie la liste représentant $s(P)$.

ii. Montrer que s est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres pour s.

b. Justifier que s est un endomorphisme de E.

c. Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$. En déduire les valeurs propres éventuelles de s.

d. On pose $A_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ X^n & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$.

Calculer $s(A_k)$ pour tout k de $[0, 2n]$

e. En déduire que s est diagonalisable et préciser ses valeurs propres et vecteurs propres.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on note f la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - y + z = 0$.

a. Déterminer les éléments propres de f.

b. En déduire une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale. Donner la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.

c. En utilisant la fonction `inv` de la méthode `Linear algebra` du module `numpy` (`numpy.linalg.inv()`), calculer P^{-1} puis, en utilisant la fonction `dot` du module `numpy`, qui renvoie le produit matriciel, déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6. Soit $t \in \mathbb{C}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et l'exprimer comme combinaison linéaire de A et I_3

b. A est-elle inversible ? Si oui, déterminer A^{-1}

c. Déterminer les valeurs propres de A.

d. A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice P qui la diagonalise et la matrice D qui lui est semblable.

e. En utilisant la fonction `inv` de la méthode `Linear algebra` du module `numpy` (`numpy.linalg.inv()`), calculer P^{-1} puis, en utilisant la fonction `dot` du module `numpy`, qui renvoie le produit matriciel, déterminer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$ en fonction .

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que A est diagonalisable.

b. En utilisant la fonction `dot` du module `numpy`, qui renvoie le produit matriciel, écrire une fonction Python d'arguments deux matrices A et B qui renvoie `True` si $AB = BA$ et `False` sinon.

c. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.
Soit f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement.
Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g (c'est-à-dire que $g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$.

d. En déduire que B est diagonalisable.

e. Déterminer toutes les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2$.

8. On modélise les liaisons entre trois atomes par un système de trois masselottes A, B, C de même masse $m > 0$ et deux ressorts (entre A et B et entre B et C) de même raideur $k > 0$. Le système est unidimensionnel.
On repère l'abscisse des masselotes au cours du temps par $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$.
Au temps 0, les ressorts sont tendus et on lâche les masselotes. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire le système différentiel suivant : $\begin{cases} m\,x_1''(t) = -2k\,x_1(t) + k\,x_2(t) \\ m\,x_2''(t) = k\,x_1(t) - 2k\,x_2(t) + k\,x_3(t) \\ m\,x_3''(t) = k\,x_2(t) - 2k\,x_3(t) \end{cases}$. On pose $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$.

a. Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X''(t) = A\,X(t)$. Justifier que A est diagonalisable.

b. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A.

c. On note $Y(t)$ la matrice colonne des coordonnées de $X(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Déterminer une matrice diagonale D telle que $Y''(t) = DY(t)$.

d. Résoudre le système obtenu puis déterminer les expressions générales de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ en fonction de t.

e. On suppose que $k = m$, $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$ et $x_1'(0) = x_2'(0) = x_3'(0) = 0$.
Représenter sous Python les trois fonctions x_1, x_2 et x_3.