TD Analyse

1. Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1}\sin\frac{t}{2^n}$ et $v_n = 2^{n+1}\tan\frac{t}{2^n}$.

- **a.** Écrire une fonction Python d'arguments un réel t de $]0, \frac{\pi}{2}[$ et un entier n qui permet de représenter les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Que peut-on conjecturer ?
- **b.** Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et calculer leur limite commune.

2. Soit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$.

- **a.** Écrire une fonction Python d'argument un entier n et deux réels $u0$ et $v0$ qui renvoie les valeurs de u_n et v_n.
- **b.** À l'aide de la suite complexe de terme général $z_n = u_n + iv_n$, déterminer u_n et v_n en fonction de n.
- **c.** Retrouver les résultats précédents en utilisant une matrice carrée d'ordre 2.
- **d.** Déterminer les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ et $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$.

- **a.** Écrire une fonction Python d'argument un entier n qui permet d'estimer la limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **b.** Montrer que : $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)^2 - 1}} \leqslant f(k+1) - f(k) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$.
- **c.** La suite (S_n) est-elle convergente ? Déterminer un équivalent de S_n.

4. On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 f''(x) - 4x f'(x) + 6f(x) = 0$

- **a.** Vérifier que E est un espace vectoriel.
- **b.** Soit $f \in E$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$. Montrer que g de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*)$ et que $g'' = 0$.
- **c.** En déduire une base de E et sa dimension.
- **d.** Représenter sous Python plusieurs fonctions de E sur un même schéma de manière à représenter les différentes courbes possibles.

5. On considère l'équation différentielle (E) : $(x^2 - 1)y' - 2xy = x^2 + 8x + 1$

- **a.** Résoudre l'équation (E), sachant qu'une solution particulière est un polynôme de degré 1.
  On pose f_λ la solution de (E) ayant pour paramètre le réel λ.
- **b.** Représenter sous Python la famille de fonctions f_λ pour $\lambda \in [\![-10, 10]\!]$ avec un pas de 2.
- **c.** Par quels points du plan passe-t-il une seule courbe intégrale de (E) ?
- **d.** Par quels points du plan passe-t-il une infinité de courbes intégrales de (E) ?
- **e.** Par quels points du plan passe-t-il aucune courbe intégrale de (E) ?

6. On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

- **a.** Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et que $I = J$.
- **b.** À l'aide de la méthode des rectangles, calculer sous Python une valeur approchée de I.
- **c.** Calculer $I + J$, en déduire I et J.

7. Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$.

- **a.** Déterminer le domaine de définition et la parité de f.
- **b.** À l'aide de la méthode des rectangles, représenter sous Python la fonction f.

8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

- **a.** Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
- **b.** Déterminer sous Python des valeurs approchées de $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
- **c.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
- **d.** On admet que f est continue sur $\mathcal{D}_f$. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.
- **e.** En déduire les valeurs des limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ et vers $+\infty$.

9. Soit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

- **a.** Déterminer les points critiques de f.
- **b.** Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) + 8 = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2$.
- **c.** En déduire les extrema de la fonction f
- **d.** Compléter le script Python suivant pour représenter la fonction f :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x,y):
    return ...

Lx = np.linspace(-5,5)
Ly = np.linspace(-5,5)

ax = Axes3D(plt.figure())
X,Y = np.meshgrid(Lx,Ly)
Z = ...
ax.plot_surface(X,Y,Z)
plt.show()
```

10. Dans cet exercice, on souhaite montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et en calculer sa somme.

- **a.** Estimer sous Python la valeur de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
- **b.** Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$
- **c.** Montrer que $\forall t \in]0, \pi],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2} t\right) \sin\left(\frac{n}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$
- **d.** On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$, montrer que f est $\mathcal{C}^1([0, \pi])$.
- **e.** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t$.
- **f.** À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t = 0$.

  En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et calculer sa somme.