TD Probabilités - Variables aléatoires

1. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant :

après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

- **a.** Écrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable aléatoire X_n.
- **b.** Déterminer la loi de X_1 et la loi de X_2.
- **c.** Déterminer la loi de X_n.

2. Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent les lois de Bernoulli de même paramètre p

Pour tout $n > 0$, on pose $Y_n = X_n^2 + X_{n+1}^2 - 2X_nX_{n+1}$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

- **a.** Écrire une fonction Python qui permet de simuler la variable Z_n
- **b.** Déterminer la loi de Y_n
- **c.** Déterminer l'espérance de Z_n.

3. Une roue circulaire est partagée en n secteurs, de même angle au centre, avec $n \geqslant 2$.

Cette roue tourne devant un curseur et, lorsqu'elle s'arrête, elle indique un nombre entre 1 et n.

On admet l'équiprobabilité de l'obtention des différents secteurs.

On fait tourner deux fois de suite la roue de manière indépendante et on désigne respectivement par X et Y les nombres obtenus.

- **a.** Écrire une fonction Python qui permet d'estimer la probabilité $P(X = Y)$.
- **b.** Calculer la probabilité $P(X = Y)$.
- **c.** En remarquant que les événements $(X < Y)$, $(X = Y)$ et $(X > Y)$ constituent un système complet d'événements, calculer la probabilité $P(X \geqslant Y)$.
- **d.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z définie par $Z = X - Y$.

4. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2^x} \text{ si } x \geqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

- **a.** Déterminer la valeur du réel a pour que f soit une densité. Pour cette valeur de a, on note X une variable de densité f.
- **b.** Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
- **c.** Reconnaître la loi de $Y = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de X.
- **d.** Soit $Z = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire Z.
- **e.** Déterminer la loi de Z. La variable Z admet-elle une espérance et une variance. Si oui, les calculer.

5. On choisit deux points au hasard sur un intervalle de longueur 2. Soit Z la distance entre ces deux points.

- **a.** Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire
- **b.** Déterminer la loi de Z.
- **c.** Calculer l'espérance et la variance de Z.

6. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

- **a.** Écrire une fonction Python qui permet de représenter la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.
- **b.** Déterminer la loi de $Y = \dfrac{1}{X^2+1}$.

7. Alice achète pour ses poules 9 sacs de blé à Bob d'une contenance étiquetée de 80kg chacun (elle s'attend donc à avoir 720kg de blé).

Bob n'étant pas toujours attentif, la masse du blé contenu dans un sac suit en réalité la loi $\mathcal{N}(80; 0,25)$.

Soit X la quantité de blé, en kilogrammes, que Bob a effectivement vendue à Alice.

- **a.** Donner la loi de X.
- **b.** Calculer la probabilité pour que Alice ait acheté en réalité moins de 720 kg de blé.
- **c.** **i.** Une poule picore en moyenne 150 grammes de blé par jour, avec un écart-type de 50, en suivant une loi normale. Quelle est la loi de la quantité de blé mangée en un an par une poule ?
  - **ii.** Combien Alice peut-elle nourrir de poules au maximum pendant un an (année non bissextile), avec une probabilité au moins égale à $0,95$ de ne pas manquer de grain ?

8. On effectue une simulation par ordinateur de lancers simultanés de deux dés classiques et pour le lancer n, on note S_n la somme des deux dés obtenus.

- **a.** Écrire une fonction Python qui prend comme argument un entier n et qui renvoie la liste des valeurs simulées de $S_1, \cdots, S_n$.
- **b.** Déterminer la loi de S_n.
- **c.** Déterminer la probabilité d'obtenir, pour 2000 simulations, $S_n = 6,\ 7$ ou 8 entre 1000 et 1100 fois.

9. On soupçonne une pièce d'être truquée. On effectue alors $n = 50$ lancers avec cette même pièce et on obtient 29 piles.

- **a.** On peut donc penser que la pièce est effectivement truquée et que la probabilité d'obtenir Pile est égale à $p = \frac{29}{50}$.

  Sous cette hypothèse, écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui renvoie la liste de n résultats de lancers.
- **b.** Peut-on conclure sur la question avec 95% de chance d'avoir raison ?
- **c.** La conclusion est-elle la même au seuil de 99% ?

10. On s'intéresse aux intentions de vote aux prochaines élections municipales de Rennes.

- **a.** Dans cette question, on suppose que les 117439 inscrits sur les listes électorales de la ville votent de manière aléatoire pour l'un des cinq candidats A, B, C, D ou E.

  Écrire une fonction Python qui simule cette élection et renvoie la liste $[n_A, n_B, n_C, n_D, n_E]$ des nombres de voix pour chaque candidat.
- **b.** On s'intéresse plus particulièrement aux intentions de vote pour le candidat A.

  Comme on ne peut pas interroger tous les électeurs, un institut effectue un sondage sur les intentions de vote pour ce candidat sur un échantillon de 200 rennais et observe que 122 d'entre eux souhaitent voter pour le candidat A. Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour p. Qu'en pensez-vous ?