Planche 2

Question de cours.

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice.

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$.

   On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de numéros distincts obtenus.
2. Déterminer la loi de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut l'espérance de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?
3. (a) Écrire une fonction Python d'argument n qui simule l'expérience et renvoie la liste des numéros tirés.
   (b) Écrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable X. On pourra obtenir l'ensemble des valeurs d'une liste L avec la commande `set(L)` et obtenir le cardinal d'un ensemble s avec la commande `len(s)`.
   (c) Écrire une fonction Python d'argument n qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X.
4. Calculer :
   (a) $P(X = 1)$
   (b) $P(X = n)$
   (c) $P(X = 2)$
   (d) $P(X = n - 1)$
5. Pour i entre 1 et n, on note A_i l'événement « le numéro i fait partie des numéros obtenus au cours des n tirages » et on note X_i la variable indicatrice de l'événement A_i (X_i prend la valeur 1 si A_i est réalisé et 0 sinon).
   (a) Calculer la loi de X_i et son espérance.
   (b) Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. (a) Pour i et j distincts entre 1 et n, calculer la loi de la variable X_iX_j.
   (b) Calculer la variance de X.