1. **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp(\varphi) \Leftrightarrow \lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow rg(A - \lambda I_3) < 3$.

Or $rg(A - \lambda I_3) = rg\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

donc $rg(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $rg\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} < 2$

$\Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$.

Ainsi, on a bien $\boxed{Sp(\varphi) = \{1, 3\}}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$AX = 3X \Leftrightarrow (A - 3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

Soit $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$ alors $E_1(\varphi) = \text{vect}(u)$ et $E_3(\varphi) = \text{vect}(v)$.

Comme $\dim E_1(\varphi) + \dim E_3(\varphi) = 2 < 3$, $\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

b. On étudie le rang de la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$:

$rg(\mathcal{B}) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}{=} rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = 3$ donc

$\boxed{\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

D'après **a.**, $\varphi(a_1) = 3a_1$, $\varphi(a_3) = a_3$. Par calcul matriciel, $\varphi(a_2) = (1, 1, 3) = a_1 + 3a_2$.

On en déduit que $\boxed{M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

c. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ alors

$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = PMP^{-1}}$.

Les commandes

```
import numpy as np
P = np.array([[1,0,1],[1,0,-1],[0,1,0]])
print(np.linalg.inv(P))
```

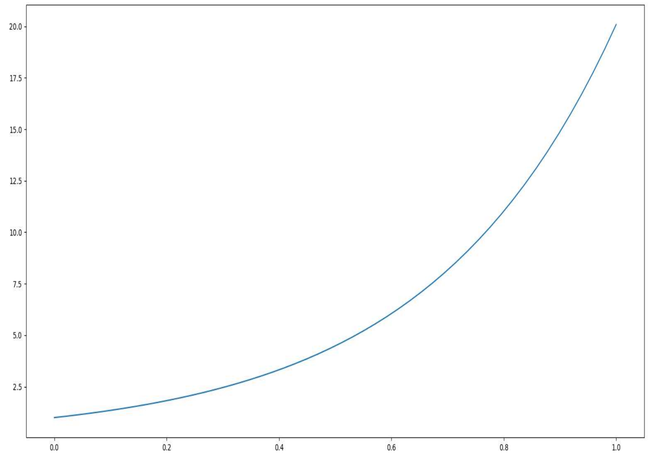
renvoient la matrice $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}$.

2. **a.** Les solutions de l'équation différentielles $h' = 3h$ sont les fonctions de la forme $h(t) = Ce^{3t}$. La condition initiale $h(0) = 1$ donne $C = 1$ donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = e^{3t}}$.

Les commandes

```
import matplotlib.pyplot as plt
def h(t):
    return np.exp(3*t)
Lt = np.linspace(0,1)
Lh = h(Lt)
plt.plot(Lt,Lh)
plt.show()
```

affichent la courbe



b. Le système différentiel s'écrit $X'(t) = AX(t)$ or $A = PMP^{-1}$.
On en déduit que $X'(t) = PMP^{-1}X(t)$ et donc $P^{-1}X'(t) = MP^{-1}X(t)$ ou encore $Y'(t) = MY(t)$.

On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = 3u(t) + v(t) \\ v'(t) = 3v(t) \\ w'(t) = w(t) \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = 3u(t) + be^{3t} \\ v(t) = be^{3t},\ b \in \mathbb{R} \\ w(t) = ce^{t},\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$.

La condition initiale s'écrit : $Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$u(0) = v(0) = 1,\ w(0) = 0$.

On obtient alors $b = 1$ donc on a bien : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}}$.

c. Les solutions de l'équation homogène $u'(t) = 3u(t)$ sont de la forme $u_h(t) = ae^{3t}$.
On cherche une solution particulière de l'équation $u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$ par la méthode de variations de la constante :
Soit $u_p(t) = a(t)e^{3t}$ alors $u_p'(t) = a'(t)e^{3t} + 3a(t)e^{3t}$ donc $u_p'(t) = 3u_p(t) + e^{3t} \Leftrightarrow a'(t) = 1$.
On peut choisir $u_p(t) = bte^{3t}$.
Les solutions de l'équation différentielle $u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$ sont donc $\forall t \in \mathbb{R}$,
$u(t) = ae^{3t} + te^{3t}$.
La condition initiale $u(0) = 1$ donne $a = 1$ donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = e^{3t} + te^{3t}}$.

d. Comme $Y(t) = P^{-1}X(t)$ on a $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} + te^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en conclut que : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(t) = e^{3t} + te^{3t} \\ g(t) = te^{3t} \end{cases}}$.

Remarque, on retrouve aussi que $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = e^{3t}$.