# Oral 3 - SCAV 2023

1. On considère $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice $A$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que le spectre de l'endomorphisme $\varphi$ est : $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

   (b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice $M$ de l'endomorphisme $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$.

   (c) Déterminer une matrice carrée $P$ telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter $P^{-1}$ à l'aide de la fonction `inv` de Python.
   *La commande `inv` du module `linalg` de la bibliothèque `numpy` permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type `matrix`.*

2. Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions dérivables sur $R$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) &= 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) &= f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) &= 3h(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$

   (a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de $h$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

   (b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.
   On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.
   Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

   (c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de $t$.