1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$. Comme $\ln(1-\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{1}{n}) = -1$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1}}$.

2. $\boxed{X(\Omega) = [[1,n]]}$.

• Pour $n = 2$: $\Omega = \{1,2\}^2$ donc $\mathrm{card}\Omega = 4$.

$[X=1] = \{(1,1),(2,2)\}$ et $[X=2] = \{(1,2),(2,1)\}$.

$\mathrm{card}([X=1]) = \mathrm{card}([X=2]) = 2$ donc $\boxed{P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(X) = \frac{3}{2}}$.

• Pour $n = 3$: $\Omega = \{1,2,3\}^3$ donc $\mathrm{card}\Omega = 27$.

$[X=1] = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\}$, $\mathrm{card}([X=1]) = 3$.

$[X=3]$ est l'ensemble des permutations de $\{1,2,3\}$ donc $\mathrm{card}[X=3] = 3!$

donc $\boxed{P(X=1) = \frac{1}{9},\ P(X=2) = \frac{2}{3},\ P(X=3) = \frac{2}{9} \text{ et } E(X) = \frac{19}{9}}$.

3. **a.** Comme il y a remise, à chaque tour, on utilise la fonction `randint` du module `random` :

```python
import random as rd
def simul(n):
    return [rd.randint(1,n) for _ in range(n)]
```

b. On utilise les indications :

```python
def X(n):
    L = simul(n)
    return len(set(L))
```

c. On calcule la moyenne d'un grand nombre de réalisation de X :

```python
def EspX(n):
    N = 1000
    return sum([X(n) for _ in range(N)])/N
```

4. $\Omega = [[1,n]]^n$ donc $\mathrm{card}\Omega = n^n$

a. $[X=1] = \{(i,\cdots,i) \mid i \in [[1,n]]\}$ donc $\mathrm{card}[X=1] = n$ et $\boxed{P(X=1) = \frac{1}{n^{n-1}}}$.

b. $[X=n]$ est l'ensemble des permutations de $[[1,n]]$ donc $\mathrm{card}[X=n] = n!$ et

$\boxed{P(X=n) = \frac{n!}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}}$.

c. Lorsque l'on choisit les deux entiers distincts de $[[1,n]]$, $[X=2]$ est alors l'ensemble des n-listes de ces deux entiers auquel on retire les deux n-listes constantes. On en déduit que

$\mathrm{card}[X=2] = \binom{n}{2}(2^n-2) = n(n-1)(2^{n-1}-1)$ donc

$\boxed{P(X=2) = \frac{n(n-1)(2^{n-1}-1)}{n^n} = \frac{(n-1)(2^{n-1}-1)}{n^{n-1}}}$.

d. Lorsque l'on choisit $n-1$ entiers distincts de $[[1,n]]$, on chosit parmi ces $n-1$ entiers celui qui apparaitra deux fois puis on choisit les deux numéros de tirages parmi les n où il apparaitra $[X=n-1]$ est alors l'ensemble des permutations des $(n-2)$ autres entiers. On en déduit que

$\mathrm{card}[X=n-1] = \binom{n}{n-1}\binom{n-1}{1}\binom{n}{2}(n-2)!$ donc

$\boxed{P(X=n-1) = \frac{(n(n-1))^2(n-2)!}{2n^n} = \frac{(n-1)n!}{2n^{n-1}}}$.

5. Soit $i \in [[1,n]]$ et $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le numéro } i \text{ a été tiré} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

a. $[X_i = 0] = \overline{A_i}$: "les n tirages donnent un numéro de $[[1,n]]\setminus\{i\}$".

On en déduit que $\mathrm{card}([X_i=0]) = (n-1)^n$

donc $\boxed{P(X_i=0) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,\ P(X_i=1) = 1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \text{ et } E(X_i) = 1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}$.

b. On remarque que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donc, par linéarité de l'espérance,

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$.

On a alors $\boxed{E(X) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)}$.

D'après **1.**, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right) = 1 - \frac{1}{e}$ donc, par produit, $\boxed{E(X) \sim n\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$.

6. a. Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $i \neq j$ et $X_iX_j = \begin{cases} 1 \text{ si les numéros } i \text{ et } j \text{ ont été tirés} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On procède comme en **5a.** : $[X_iX_j = 0] = [X_i = 0] \cup [X_j = 0] = \overline{A_i} \cup \overline{A_j}$
donc $P(X_iX_j = 0) = P(\overline{A_i} \cup \overline{A_j}) = P(\overline{A_i}) + P(\overline{A_j}) - P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})$.
D'après **5a.**, $P(\overline{A_i}) = P(\overline{A_j}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.
De plus, comme $\overline{A_i} \cap \overline{A_j}$ est l'événement : "les n tirages donnent un numéro de $[[1,n]] \setminus \{i,j\}$", $\text{card}(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = (n-2)^n$.
On en déduit que :

$\boxed{P(X_iX_j = 0) = 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-2}{n}\right)^n,\ P(X_iX_j = 1) = 1 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n}$.

b. Comme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j)$.

On a $V(X_i) = \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ car $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)$.

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_i,X_j) &= E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = 1 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n-2}{n}\right)^n - 1 + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

On a alors $V(X) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + n(n-1)\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}\right]$

Finalement : $\boxed{V(X) = n\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + (n-1)\left(\frac{n-2}{n}\right)^n - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}\right]}$.