Sujet 4
Question de cours
Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ |\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$
De plus, $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\,\|v\| \Leftrightarrow u$ et v sont colinéaires.

Exercice

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -2 et en 2.
De plus l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ n'est pas impropre donc convergente.
De plus, en posant $x = 2\sin u,\ u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{d}x = 2\cos u\,\mathrm{d}u$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$ $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 u}\,2\cos u\,\mathrm{d}u$
donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}u$ car $\cos u \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Comme $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u$.
On obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi - \left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)\right) = 1.$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2. Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.
   a. L'univers image de x est l'intervalle $[-2,2]$ qui est un intervalle fermé borné donc $\boxed{X \text{ admet un moment de tout ordre}}$.
   b. Par définition, $E(X^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ donc $\boxed{E(X^0) = 1}$.
   c. Par définition, $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^k\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.
   Si k est impair alors la fonction $x \mapsto x^k\sqrt{4-x^2}$ est impaire donc $\int_{-2}^{2} x^k\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
   On a montré que $\boxed{\text{si } k \text{ est un entier naturel impair alors } E(X^k) = 0}$.

3. a. Soit h une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout entier strictement positif, on pose $R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$. Alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$
   Donc $\boxed{R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \text{ est une valeur approchée de } \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x}$.
   b. On définit la fonction f puis dans une boucle `for`, on calcule R_n pour $a=-2$, $b=2$ et n assez grand de sorte que la valeur de R_n soit assez précise :

```python
import math as m
def f(x):
    return m.sqrt(4-x**2)/(2*m.pi)
def moment2k(k):
    def h(x):
        return x**(2*k)*f(x)
    n = 1000
    return 4*sum([h(-2+4*k/n) for k in range(n)])/n
print(moment2k(100))
```

4. a. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$$4u_k - u_{k+1} = 4E(X^{2k}) - E(X^{2k+2}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} 4x^{2k}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2k+2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2k}\sqrt{4-x^2}\,(4-x^2)\,\mathrm{d}x.$$
   Soit $u = (4-x^2)^{3/2}$, $v = \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, u et v sont $\mathcal{C}^1$ sut $[-2,2]$ de plus $u' = -3x\sqrt{4-x^2}$ et $v' = x^{2k}$.
   Par intégration par parties, on obtient
$$4u_k - u_{k+1} = \left[(4-x^2)^{3/2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_{-2}^{2} + \frac{3}{2k+1}\int_{-2}^{2} x^{2k+2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   Ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ 4u_k - u_{k+1} = \frac{3}{2k+1}u_{k+1}}$.

b. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N},\ 4u_k = \left(\dfrac{3}{2k+1}+1\right)u_{k+1}$ soit $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \dfrac{2(2k+1)}{k+2}u_k}$.

c. Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \dfrac{(2k)!}{(k+1)!k!}$.

Initialisation : pour $k = 0,\ u_0 = E(X^0) = 1$ et $\dfrac{0!}{1!0!} = 1$, la proposition est vérifiée.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k = \dfrac{(2k)!}{(k+1)!k!}$ et montrons que $u_{k+1} = \dfrac{(2k+2)!}{(k+2)!(k+1)!}$.

Or $u_{k+1} = \dfrac{2(2k+1)}{k+2}u_k = \dfrac{2(2k+1)}{k+2}\dfrac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \dfrac{2(2k+1)!}{(k+2)!k!} = \dfrac{2(k+1)(2k+1)!}{(k+2)!(k+1)!} = \dfrac{(2k+2)!}{(k+2)!(k+1)!}$, la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \dfrac{(2k)!}{(k+1)!k!}}$.

d. Pour tout entier naturel k, $u_k = \dfrac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \dfrac{1}{k+1}\dfrac{2k(2k-1)\cdots(k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}\dfrac{2k-i}{k-i}$.

Comme $\forall i \in [[0,k-1]],\ \dfrac{2k-i}{k-i} \sim 2,\ u_k \sim \dfrac{2^k}{k+1}$ donc, par croissance comparée,

$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u_k = +\infty}$.