Sujet 4

Question de cours
Inégalité de cauchy schwarz

Exercice
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
Pour le calcul d'une intégrale, on pourra utiliser le changement de variable $x = 2\sin u$.

2. Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.
- **a.** Montrer que, pour tout entier strictement positif k, X admet un moment d'ordre k.
- **b.** Calculer $E(X^0)$.
- **c.** Montrer sans calcul que, si k est un entier naturel impair alors $E(X^k) = 0$.

3.
- **a.** Rappeler la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ où h est une fonction continue sur $[a,b]$.
- **b.** En déduire une fonction Python d'argument un entier k qui renvoie une valeur approchée de $E(X^{2k})$.

4.
- **a.** Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = E(X^{2k})$.
  En utilisant une intégration par parties, exprimer $4u_k - u_{k+1}$ en fonction de u_{k+1}.
- **b.** Montrer alors que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = 2\dfrac{2k+1}{k+2}u_k$.
- **c.** En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \dfrac{(2k)!}{(k+1)!k!}$.
- **d.** Calculer la limite de u_k quand k tend vers $+\infty$.