1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n}} = \dfrac{2^n(n+1)!}{2^{n+1}n!}$. On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2}}$.

b. Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 3,\ u_n \geqslant \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$:

Initialisation : pour $n = 3$, $u_3 = \dfrac{3!}{2^3} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3}{4}$: la proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \geqslant 3$.

D'après **a.**, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}u_n$ donc si $u_n \geqslant \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ alors $u_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{2}\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

Or $\dfrac{n+1}{2} \geqslant \dfrac{3}{2}$ donc $u_{n+1} \geqslant \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$: la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 3,\ u_n \geqslant \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$.

c. Comme $\dfrac{3}{2} > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$

donc, par comparaison, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est divergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2. **a.** $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1$ donc $\boxed{I_0 = \dfrac{e^2-1}{2}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x$. On pose $u = (1-x)^{n+1}$ et $v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc, par intégrations par parties,

$I_{n+1} = \left[\dfrac{1}{2}e^{2x}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 + \dfrac{n+1}{2}\displaystyle\int_0^1 e^{2x}(1-x)^n\,\mathrm{d}x.$

On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n+1}{2}I_n}$.

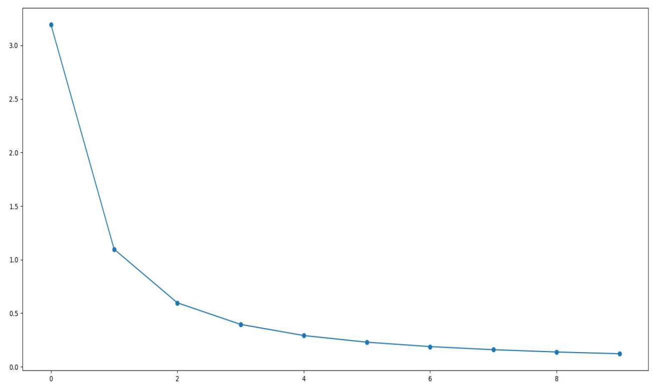
c. On utilise la valeur de I_0 et la relation dé récurrence précédente :

```
import math as m
def I(n):
    i = (m.exp(2)-1)/2
    for k in range(n):
        i = (k+1)*i/2-1/2
    return i
```

d. Pour conjecture le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on la représente :

```
import matplotlib.pyplot as plt
n = 10
Ln = list(range(n))
LI = [I(n) for n in Ln]
plt.plot(Ln,LI,marker='o')
plt.show()
```

On obtient



$\boxed{\text{On conjecture que la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et converge vers } 0}$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{2x}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 e^{2x}(1-x)^n\,\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 e^{2x}(1-x)^n(1-x-1)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 xe^{2x}(1-x)^n\,\mathrm{d}x.$

Comme $\forall x \in [0,1],\ xe^{2x}(1-x)^n\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$ par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 xe^{2x}(1-x)^n\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}.\ I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

f. Comme $\forall x \in [0,1],\ e^{2x}(1-x)^n\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$ par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.

Étant décroissante et minorée, $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

Soit ℓ sa limite. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$, par passage à la limite, $\ell \geqslant 0$.

Supposons que $\ell > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n+1}{2} I_n = +\infty$ ce qui est, , d'après **b.**, contradictoire avec $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = \ell$.

On en conclut que $\ell = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

g. $\boxed{\text{La conjecture de } \textbf{2d}\text{. est vérifiée}}$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après **2b.**, $I_{n+1} - J_{n+1} = \dfrac{n+1}{2} I_n - \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{n+1}{2} J_n - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{n+1}{2}(I_n - J_n)$.

On en déduit, de proche en proche (ou par récurrence), que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - J_n = \dfrac{n!}{2^n}(I_0 - J_0)$.

Si $J_0 = I_0 = \dfrac{e^2-1}{2}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$ donc $\boxed{\text{si } J_0 < \dfrac{e^2-1}{2} \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0}$.

Sinon, d'après **1c.**, $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = \begin{cases} +\infty \text{ si } I_0 > J_0 \\ -\infty \text{ si } I_0 < J_0 \end{cases}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \begin{cases} -\infty \text{ si } J_0 < \dfrac{e^2-1}{2} \\ +\infty \text{ si } J_0 > \dfrac{e^2-1}{2} \end{cases}}$.