Retour Oral 7 - Chato 2023

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 e^{2x}(1-x)^n \mathrm{d}x$.

1. *Étude d'une suite auxiliaire.* Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{n!}{2^n}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 \quad u_n \geq \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et calculer sa limite le cas échéant.
2. (a) Calculer I_0.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad I_n = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2}$.
   (c) Programmer une fonction `Int` qui prend en entrée un entier `n` et qui renvoie en sortie la valeur de I_n obtenue par la relation de récurrence précédente.
   (d) Conjecturer le comportement de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.
   (e) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   (f) En déduire que (I_n) converge et calculer sa limite.
   (g) Que dire de la conjecture précédente ?
3. Soit $(J_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par la donnée de son premier terme $J_0 \in \mathbf{R}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad J_n = \frac{n+1}{2} J_n - \frac{1}{2}.$$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad I_n - J_n = \frac{n!}{2^n}(I_0 - J_0)$.
   (b) Proposer une explication sur la conjecture de la question 2. (d).