1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.

De plus, l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est impropre en $+\infty$.

Soit $a \geqslant 1$ et $I(a) = \int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = -\frac{1}{a} + 1$.

Comme $\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right) = 1$, I est convergente et $I = 1$.

On en conclut que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2. D'après ci-dessus, par définition,

$$\boxed{\text{la fonction de répartition de } X \text{ est définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}.$$

3. **a.** On pose $Z = \frac{1}{1-U}$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. On a $U(\Omega) =]0,1[$ donc $Z(\Omega) =]1,+\infty[$. Soit $x > 1$.

$P(Z \leqslant x) = P\left(\frac{1}{1-U} \leqslant x\right) = P\left(U \leqslant 1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x}$ car $1 - \frac{1}{x} \in]0,1[$.

En posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$, on remarque que X et Z ont la même fonction de répartition donc $\boxed{X \text{ et } Z \text{ suivent la même loi}}$.

b. Une simulation de X est donc obtenue par une simulation de $Z = \frac{1}{1-U}$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$:

```
import random as rd
def X():
    U = rd.random()
    return 1/(1-U)
```

c. On utilise la fonction `floor` du module `math` qui renvoie la partie entière d'un flottant :

```
import math as m
def Y():
    x = X()
    return x-m.floor(x)
```

d. On estime l'espérance de Y en calculant la moyenne des valeurs prises par Y sur un grand nombre de réalisations de Y :

```
def EspY(N):
    return sum([Y() for _ in range(N)])/N
```

Pour des grandes valeurs de N, on peut conjecturer que $\boxed{E(Y) \approx 0,42}$.

4. Soit $x \in [0,1]$. En utilisant le système complet d'événements $([\lfloor X \rfloor = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$P(Y \leqslant x) = P(X - \lfloor X \rfloor \leqslant x) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [\lfloor X \rfloor = k, X - \lfloor X \rfloor \leqslant x]\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [k \leqslant X < k + x]\right).$$

Les événements $([k \leqslant X < k+x])_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles donc

$$P(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leqslant X < k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (F(k+x) - F(k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{k+x}\right) - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

On a bien $\boxed{P(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leqslant X < k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)}$.

5. La fonction ln est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$\forall t > 0,\ \exists c \in]t, t+1[\mid \ln(t+1) - \ln t = \frac{1}{c}(t+1-t) = \frac{1}{c}$.

Comme $t < c < t+1 \Leftrightarrow \frac{1}{t+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{t}$,

on a bien $\boxed{\forall t > 0,\ \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln t < \frac{1}{t}}$.

6. Montrons que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes :

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$U_{n+1} - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1))$.

D'après **5.**, pour $t = n+1$, $\ln(n+2) - \ln(n+1) < \dfrac{1}{n+1}$ donc $\dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) > 0$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*.\ U_{n+1} - U_n > 0$ et la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $V_{n+1} - V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$.

D'après **5.**, pour $t = n$, $\ln(n+1) - \ln n > \dfrac{1}{n+1}$ donc $\dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*.\ V_{n+1} - V_n < 0$ et la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$V_n - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$.

On conclut que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et donc que

$\boxed{\text{les suites } (U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent vers une même limite}}$.

7. On sait que la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ est convergente donc son reste d'ordre n, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ tend vers 0.

On admet que $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \int_0^1 s(t)\,\mathrm{d}t - U_n \leqslant R_n$

donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 s(t)\mathrm{d}t - U_n\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 s(t)\mathrm{d}t$.

On a bien : $\boxed{\int_0^1 s(t)\mathrm{d}t = \gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n}$.

8. Par définition de la partie entière : $\forall x \geqslant 1,\ \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}^*$ et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$.

On en déduit que $Y(\Omega) \subset [0,1]$ donc $\boxed{Y \text{ admet une espérance}}$.

On admet alors que $E(Y) = \int_0^{+\infty} P(Y > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 P(Y > x)\,\mathrm{d}x$ car si $x > 1$ alors $P(Y > x) = 0$.

Comme $P(Y > x) = 1 - P(Y \leqslant x) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$, on en déduit que

$E(Y) = \displaystyle\int_0^1\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right)\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\mathrm{d}x$ et, par linéarité de l'intégrale,

$E(Y) = 1 - \displaystyle\int_0^1 s(x)\,\mathrm{d}x$. D'après **7.**, on conclut que $\boxed{E(Y) = 1 - \gamma}$.

9. Montrons que si Z est une variable aléatoire positive à densité admettant une espérance alors $E(Z) = \int_0^{+\infty} P(Z > x)\,\mathrm{d}x$.

Soit g une densité d'une telle variable Z.

Comme Z est à valeurs positives, si $x < 0$ alors $g(x) = 0$.

Par définition de l'espérance, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente

et $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit $a > 0$ et $I(a) = \int_0^a xg(x)\,\mathrm{d}x$.

On sait que la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$ existe et vaut $E(Z)$.

Comme $\int_0^x \mathrm{d}t = x$,

$I(a) = \int_0^a\left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a\left(\int_t^a g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^a\left(\int_t^a g(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^a P(t \leqslant Z \leqslant a)\,\mathrm{d}t$.

On en déduit que $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a) = \int_0^{+\infty} P(t \leqslant Z)\,\mathrm{d}t$.

On a bien $\boxed{E(Z) = \int_0^{+\infty} P(Z \geqslant t)\,\mathrm{d}t}$.