Retour Oral 10 - Chato 2023

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   Vérifier que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f, et $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. (a) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que la variable $Z = \dfrac{1}{1-U}$ suit la même loi que X.
   (b) Simuler la variable X sous python.
   (c) Simuler la variable Y.
   (d) Estimer informatiquement l'espérance de Y
4. Soit $x \in [0,1]$. Montrer les égalités suivantes :

$$P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

Dans la suite on note $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$.

5. Montrer que : $\forall t > 0 \quad \dfrac{1}{1+t} \leq \ln(t+1) - \ln t \leq \dfrac{1}{t}$.
6. On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

   Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite notée γ dans la suite.
7. En admettant que pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 \leq \int_0^1 s(t)\mathrm{d}t - U_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

   montrer que $\displaystyle\int_0^1 s(t)\mathrm{d}t = \gamma$.
8. En admettant que pour une variable aléatoire positive Z à densité admettant une espérance, on a $E(Z) = \int_0^{+\infty} P(Z > x)\mathrm{d}x$, montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = 1 - \gamma$.
9. Montrer le résultat relatif à l'espérance admis dans la question précédente.