Sujet 13
Question de cours
La famille $L = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre si, et seulement si :
$\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$

Exercice

1. On utilise la fonction `random()` pour simuler la probabilité de réussir un but :

```python
import random as rd
def prochain_tir(bool):
    if bool:
        return rd.random() < 3/5
    else:
        return rd.random() < 4/5
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[X_n = 1], [X_n = 0]$ forment un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales permet alors d'écrire :
$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1)$
et $P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0)$
Or $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{5}$, $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \frac{4}{5}$,
$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \frac{2}{5}$ et $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{5}$.
On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} b_{n+1} = \frac{3}{5}b_n + \frac{4}{5}e_n \\ e_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + \frac{1}{5}e_n \end{cases}}$.

3. **a.** Par définition des variables $X_1, \cdots, X_n$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dans une boucle `for`, on utilise la fonction précédente pour calculer la somme des booléens :

```python
def S(n):
    bool = rd.random() < 4/5
    Sn = bool
    for _ in range(2,n+1):
        bool = prochain_tir(bool)
        Sn += bool
    return Sn
```

b. On calcule la moyenne d'un grand nombre de réalisations de S_n que l'on divise par n :

```python
def EspSn_sur_n(n):
    N = 100000
    Esp_Sn = sum([S(n) for _ in range(N)])/N
    return Esp_Sn/n
```

4. **a.** **i.** D'après ci-dessus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$b_{n+2} = \frac{3}{5}b_{n+1} + \frac{4}{5}e_{n+1} = \frac{3}{5}b_{n+1} + \frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}b_n + \frac{1}{5}e_n\right) = \frac{3}{5}b_{n+1} + \frac{8}{25}b_n + \frac{1}{5}\left(b_{n+1} - \frac{3}{5}b_n\right)$
On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+2} = \frac{4}{5}b_{n+1} + \frac{1}{5}b_n}$.

ii. La suite $(b_n)_{n>0}$ est une suite récurrente linéaire à deux pas dont l'équation caractéristique $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{5} = 0$ admet deux solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{5}$.
On en déduit qu'il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{5}\right)^n$.
D'après l'énoncé, $b_1 = \frac{4}{5}$ donc $e_1 = 1 - b_1 = \frac{1}{5}$ donc $b_2 = \frac{3}{5}b_1 + \frac{4}{5}e_1 = \frac{16}{25}$.
On a alors $\begin{cases} b_1 = \frac{4}{5} \\ b_2 = \frac{16}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - \frac{\mu}{5} = \frac{4}{5} \\ \lambda + \frac{\mu}{25} = \frac{16}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda - \mu = 4 \\ 25\lambda + \mu = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)}$.

b. **i.** On déduit de **2**. qu'en posant $\boxed{M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = MU_n$.

ii. $A = 5M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow A - \lambda I_2$ n'est pas inversible$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$.

$\det(A - \lambda I_2) = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda+1)(\lambda-5)$: $\boxed{spec(A) = \{-1, 5\}}$.

Comme A admet deux valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

Comme 0 n'est pas valeur propre de A, $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow x + y = 0$ et $X \in E_5(A) \Leftrightarrow x - 2y = 0$.

On en déduit que $\boxed{E_{-1}(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_5(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

iii. D'après **i.**, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = M^{n-1}U_1 = \left(\frac{1}{5}A\right)^{n-1} U_1$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{5}A\right)^{n-1} = P\left(\frac{1}{5}D\right)^{n-1} P^{-1}$,

$$U_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} & 2 \\ -\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

On en conclut que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} + 2 \\ -\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} + 1 \end{pmatrix}}$.

On retrouve bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{5}\right)^n\right)}$.

c. Comme $-1 < \frac{-1}{5} < 1$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$. $\boxed{\text{La suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{2}{3}}$.

5. On sait que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(b_i)$ et X_i admet une espérance $E(X_i) = b_i = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{5}\right)^i\right)$.

On en déduit que $\boxed{\frac{S_n}{n} \text{ admet une espérance}}$ et, par linéarité de l'espérance,

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{5}\right)^i\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{5n}\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{5}}\right).$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{6n}\right)}$.

Pour comparer la valeur exacte et la valeur estimée sous Python, on peut écrire les instructions

```python
for n in [20,50,100]:
    print(EspSn_sur_n(n))
    print(2/3+(1-(-1/5)**n)/(6*n))
```

et on constate que les valeurs sont très proches.