Sujet 13

Question de cours
Soit une famille $L = (u_1, \dots, u_p)$ de p vecteurs d'un espace vectoriel E.
Donner la définition de la famille L est libre.

Exercice

Un joueur participe à un tir au but. Il a une probabilité de $\frac{3}{5}$ de marquer si son tir précédent était réussi et de $\frac{4}{5}$ si son tir précédent était raté ou si c'est son son premier tir.

1. Écrire une fonction python *prochain_tir*(*bool*), prenant en argument un boléen égal au résultat du tir précédent et qui renvoie `True` s'il marque, `False` sinon.

   Pour tout entier n strictement positif, on pose $X_n = \begin{cases} 1 \text{ si le joueur marque au } n\text{-ième tir} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et on note $b_n = P(X_n = 1)$ et $e_n = P(X_n = 0)$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} b_{n+1} = \frac{3}{5} b_n + \frac{4}{5} e_n \\ e_{n+1} = \frac{2}{5} b_n + \frac{1}{5} e_n \end{cases}$.

3. On note S_n le nombre de tirs au but réussis au cours des n premiers tirs.
   a. Écrire une fonction python d'argument un entier $n > 0$ permettant de simuler S_n.
   b. En déduire une fonction Python permettant d'estimer la valeur de l'espérance de $\frac{S_n}{n}$.

4. On souhaite déterminer b_n pour tout entier $n > 0$.
   a. Première méthode :
      i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+2} = \frac{4}{5} b_{n+1} + \frac{1}{5} b_n$.
      ii. Pour tout $n > 0$, exprimer b_n en fonction de n.
   b. Deuxième méthode : pour tout $n > 0$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} b_n \\ e_n \end{pmatrix}$.
      i. Déterminer la matrice M telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = MU_n$.
      ii. On pose $A = 5M$.
      Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
      iii. Pour tout $n > 0$, exprimer U_n en fonction de n et retrouver le résultat de **a. ii**.
   c. Justifier que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

5. Justifier que $\frac{S_n}{n}$ admet une espérance et la calculer. Comparer avec la valeur estimée en **3b**.