Sujet 2

Question de cours

Les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seuelement si $|q|< 1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exercice

1. Soit $(y_1, y_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\varphi(\lambda y_1 + y_2) = (\lambda y_1 + y_2)'' + 2(\lambda y_1 + y_2)' = \lambda(y_1'' + 2y_1') + (y_2'' + 2y_2')$ par linéarité de la dérivation. Donc $\varphi(\lambda y_1 + y_2) = \lambda\varphi(y_1) + \varphi(y_2)$ et φ est linéaire.
   De plus, si y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ alors y' et y'' le sont aussi donc $\varphi(y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Donc $\forall y \in F$, $\varphi(y) \in F$ et $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } F}$.

2. **a.** Comme y est deux fois dérivable, $z = y'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z' = y''$.

   On en déduit que $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ est équivalente au système } (S) : \begin{cases} z' + 2z = e^{-2t} \\ y(0) = z(0) = 0 \end{cases}}$.

   b. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   Comme y est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $y(t_k + h) = y(t_k) + hy'(t_k) = y(t_k) + hz(t_k)$ car $y' = z$.
   De même, z est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $z(t_k + h) = z(t_k) + hz'(t_k) = z(t_k) + h(e^{-2t_k} - 2z_k)$

   On a bien $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \begin{cases} y_{k+1} = y_k + hz_k \\ z_{k+1} = z_k + h(e^{-2t_k} - 2z_k) \end{cases}}$.

   c. On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et on initialise les listes T, Y et Z avec les valeurs $t_0 = a$, $y_0 = z_0 = 0$.
   Enfin, dans une boucle `for`, on construit les listes à l'aide des relations de récurrence :

```
import math as m
def Cauchy(a,b,n):
    h = (b-a)/n
    T, Y, Z = [a], [0], [0]
    for k in range(n):
        t, y, z = T[-1]+h, Y[-1]+h*Z[-1], Z[-1]+h*(m.exp(-2*T[-1])-2*Z[-1])
        T.append(t)
        Y.append(y)
        Z.append(z)
    return T, Y
```

   d. $a = 0$, $b = 5$ et $n = 100$ (par ex.). On appelle la fonction *Cauchy* pour définir les listes T et Y :

```
import matplotlib.pyplot as plt
a,b,n = 0,5,100
T, Y = Cauchy(a,b,n)
plt.plot(T,Y)
plt.show()
```

3. **a.** Les solutions de l'équation homogène $z' + 2z = 0$ sont de la forme $z_h(t) = Ce^{-2t}$, $C \in \mathbb{R}$.
   On cherche une solution particulière de la forme $z_p = C(t)e^{-2t}$ (variation de la constante) :
   $z_p' + 2z_p = e^{-2t} \Leftrightarrow C'(t) = 1$, on peut choisir $C(t) = t$ et donc $z_p(t) = te^{-2t}$.
   Ainsi, $\boxed{\text{les solutions de l'équation } z' + 2z = e^{-2t} \text{ sont de la forme } z(t) = (C+t)e^{-2t},\ C \in \mathbb{R}}$.

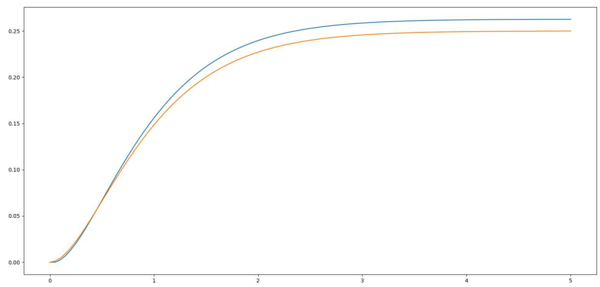
   b. Comme on a posé $z = y'$, il faut maintenant primitiver z pour trouver y :
   On pose $u = C + t$ et $v = -\frac{1}{2}e^{-2t}$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par intégration par parties, $y(t) = -\frac{C+t}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
   Les solutions de (E) sont donc de la forme $y(t) = -\frac{C+t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + D$, $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.

   $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = z(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{C}{2} - \frac{1}{4} + D = 0 \\ C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{1}{4} \end{cases}$. On conclut que

   $\boxed{\text{la solution de } (E) \text{ est la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{4}(1 - (2t+1)e^{-2t})}$.

c. Pour représenter cette fonction, on définit la fonction f puis on crée la liste des $f(t_k)$ où les t_k sont définies en **2.** :

```
def f(t):
    return (1-(2*t+1)*m.exp(-2*t))/4
F = [f(t) for t in T]
plt.plot(T,F)
plt.show()
```



4. **a.** Les fonctions u, v et w appartiennent à F.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. $au + bv + cw = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ae^x + b\cos x + c\sin x = 0$.

En particulier pour $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \pi$, on obtient $\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ a-b=0 \end{cases}$ donc $a = b = c = 0$.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (u,v,w) \text{ est une famille libre de } F}$.

b. Comme $u' = u'' = u$, $v' = -w$, $v'' = -v$ et $w' = v$, $v'' = -w$
$\varphi(u) = 3u$, $\varphi(v) = -v - 2w$ et $\varphi(w) = -w + 2v$.
$\varphi(u)$, $\varphi(v)$ et $\varphi(w)$ appartiennent à G donc $\boxed{\varphi(G) \subset G}$.

c. On en déduit également que $\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est } \Phi = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. λ est valeur propre de $\Phi \Leftrightarrow (\Phi - \lambda I_3)$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow rg(\Phi - \lambda I_3) < 3$.
Or

$$rg(\Phi - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \text{ou } \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \text{ou } (\lambda+1)^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \text{ou } \lambda = 1 \pm 2i \end{cases}.$$

Dans $\mathbb{C}$, Φ admet trois valeurs propres distinctes, dans $\mathbb{R}$, Φ admet une unique valeur propre.
On en déduit que $\boxed{\text{la matrice } \Phi \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C} \text{ mais pas dans } \mathbb{R}}$.

5. **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de $\varphi \Leftrightarrow \exists y \neq 0 \mid \varphi(y) = \lambda y \Leftrightarrow \exists y \neq 0 \mid y'' + 2y' = \lambda y$.
Or $y'' + 2y' - \lambda y = 0$ est une équation différentielle du second ordre à coefficient constant qui admet toujours des solutions non nulles donc $\boxed{\text{tout nombre réel } \lambda \text{ est valeur propre de } \varphi}$.

b. $y \in E_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow y'' + 2y' - \lambda y = 0$. L'équation caractéristique associée $(\mathcal{C})$: $x^2 + 2x - \lambda = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4(1+\lambda)$.
Si $\lambda > -1$ alors $(\mathcal{C})$ admet pour racines réelles distinctes $-1 \pm \sqrt{1+\lambda}$ donc
$\boxed{\text{si } \lambda > -1 \text{ alors } E_\lambda(\varphi) = \left\{t \mapsto Ae^{-\left(1+\sqrt{1+\lambda}\right)t} + Be^{-\left(1-\sqrt{1+\lambda}\right)t}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Si $\lambda = -1$ alors $(\mathcal{C})$ admet pour unique racine réelle -1 donc $\boxed{E_{-1}(\varphi) = \{t \mapsto (At+B)e^{-t}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Si $\lambda < -1$ alors $(\mathcal{C})$ admet deux racinescomplexes conjuguées $-1 \pm i\sqrt{-(1+\lambda)}$ donc $\boxed{\text{si } \lambda < -1 \text{ alors } E_\lambda(\varphi) = \left\{t \mapsto e^{-t}\left[A\cos(t\sqrt{-(1+\lambda)} + B\sin(t\sqrt{-(1+\lambda)}\,\right], (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

c. $\boxed{\ker\varphi = E_0(\varphi) = \{t \mapsto Ae^{-2t} + B, (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$.

d. Soit $f \in \operatorname{Im}\varphi$ alors il existe une fonction y de F telle que $\varphi(y) = f$ c'est-à-dire $y'' + 2y' = f$. Donc $f \in F$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset F$

Réciproquement, soit $f \in F$. En procédant comme dans la question **3**., on peut dire que l'équation différnetielle $y'' + 2y' = f$ admet toujours des solutions dans F. Autrement dit : $\forall f \in F,\ \exists y \in F$ telle que $\varphi(y) = f$ donc $f \in \operatorname{Im}\varphi$ et $F \subset \operatorname{Im}\varphi$. On conclut que $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = F}$.