**Sujet 2**

**Question de cours**

Donner les sommes des séries géométriques et des séries géométriques dérivées première et seconde de raison $q$ en précisant la condition de convergence.

**Exercice**

On considère l'ensemble $F$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On définit sur $F$ l'application $\varphi$ par : $\forall y \in F,\ \varphi(y) = y'' + 2y'$.

**1.** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $F$.

On considère l'équation différentielle avec conditions initiales suivante :

$$(E) : \begin{cases} y'' + 2y' = e^{-2t} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}.$$

**2.** Résolution numérique par la méthode de Cauchy : pour tout réel $t$, on pose $z = y'$.

**a.** Justifier que l'équation $(E)$ est équivalente au système

$$(S) : \begin{cases} z' + 2z = e^{-2t} \\ y(0) = z(0) = 0 \end{cases}.$$

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $h = \dfrac{b-a}{n}$.
On définit $n+1$ nombres réels en posant $t_0 = a$ et $\forall k \in [[0, n-1]],\ t_{k+1} = t_k + h$.
Pour tout $k \in [[0, n-1]]$, comme $y$ est dérivable sur l'intervalle $[[t_k, t_{k+1}]]$, on peut approcher la fonction $y$ par sa tangente en $t_k$ et donc $y(t_k + h) \approx y(t_k) + hy'(t_k)$. Pour la résolution numérique, on prendra $y(t_k + h) = y(t_k) + hy'(t_k)$.
Pour tout $k$ de $[[0, n]]$, on pose $y_k = y(t_k)$ et $z_k = z(t_k)$.
Montrer que le système $(S)$ permet d'établir les relations de récurrences :

$$\forall k \in [[0, n-1]], \begin{cases} y_{k+1} = y_k + hz_k \\ z_{k+1} = z_k + h(e^{-2t_k} - 2z_k) \end{cases}.$$

**c.** Écrire une fonction Python $Cauchy(a, b, n)$ qui prend en arguments deux flottants $a$, $b$ et un entier $n$, qui renvoie les listes $[t_0, \cdots, t_n]$, $[y_0, \cdots, y_n]$.

**d.** Tracer sous Python la courbe représentative de la solution numérique approchée de l'équation $(E)$ sur $[0, 5]$.

**3.** Résolution exacte de l'équation $(E)$ :

**a.** Résoudre l'équation différentielle $z' + 2z = e^{-2t}$.

**b.** En déduire l'unique solution $f$ de l'équation avec conditions initiales $(E)$.

**c.** Représenter sous Python la solution exacte de $(E)$ sur $[0, 5]$.

**4.** Pour tout réel $t$, on pose $u(t) = e^t$, $v(t) = \cos t$ et $w(t) = \sin t$.

**a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une famille libre de $F$.

**b.** On pose $G = Vect(\mathcal{B})$. Montrer que $\varphi(G) \subset G$.

**c.** Déterminer la matrice $\Phi$ de $\varphi$ dans $\mathcal{B}$.

**d.** La matrice $\Phi$ est-elle diagonalisable ?

**5.** **a.** Montrer que tout nombre réel $\lambda$ est valeur propre de $\varphi$.

**b.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$ associé à la valeur propre $\lambda$.

**c.** Déterminer le noyau $\ker \varphi$ de l'endomorphisme $\varphi$.

**d.** Montrer que $\operatorname{Im} \varphi = F$.