1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet une unique valeur propre réelle λ.
A est diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_\lambda(A) = n$.
Comme $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n,
on en déduit que A est diagonalisable $\Leftrightarrow E_\lambda(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Finalement $\boxed{A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow A = \lambda I_n}$.

2. C'est du cours :

```python
import random as rd
def geometrique(p):
    X = 1
    while rd.random() > p:
        X += 1
    return X
```

3. **a.** $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\det M \neq 0$.
Or $\det M = XY$. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $P(XY \neq 0) = 1$.
On en conclut que $\boxed{M \text{ est inversible presque sûrement}}$.

b. M est triangulaire suprérieure donc $Sp(M) = \{X, Y\}$.
Si $X \neq Y$ alors admet deux valeurs propres distinctes dont M est diagonalisable.
Si $X = Y$ alors M admet une unique valeur propre et, d'après **1.**, M est diagonalisable $\Leftrightarrow M = XI_2$ ce qui n'est pas le cas donc M n'est pas diagonalisable.
On conclut que $\boxed{M \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow [X \neq Y] \text{ est réalisé}}$.

c. **i.** On calcule
$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^{k-1} p (1-q)^{k-1} q\right) = pq \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^{k-1}.$$
On reconnait la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)(1-q) \in]0,1[$
donc $P(X = Y) = \dfrac{pq}{1-(1-p)(1-q)} = \dfrac{pq}{p+q-pq}$.
On en déduit que $P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \dfrac{pq}{p+q-pq}$.
On conclut alors que
$$\boxed{\text{la probabilité de l'événement "} M \text{ est diagonalisable" est } \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}}.$$

ii. On calcule la fréquence de réalisations de l'événement $[X \neq Y]$ sur un grand nombre de réalisation de X et Y :

```python
def proba_M_diag(p,q,N):
    c = 0
    for _ in range(N):
        X, Y = geometrique(p), geometrique(q)
        if X != Y:
            c += 1
    return c/N
```

En appliquant cette fonctions pour différentes valeurs de p et q, on vérifie le résultat précédent.

4. **a.** Par définition, A et B sont semblables à D si, et seulement s'il existe deux matrices carrées inversibles P et Q telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = QDQ^{-1}$.
On a alors $D = Q^{-1}BQ$ et donc $A = PQ^{-1}BQP^{-1}$.
En posant $R = PQ^{-1}$, R est une matrice inversible et $R^{-1} = QP^{-1}$.
Ainsi, il existe une matrice carrée inversible R telle que $A = RBR^{-1}$: $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}$.

b. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A possède deux valeurs propres réelles disticntes λ et μ donc A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
D'après **a.**, si A et B sont semblables alors B est semblable à D donc $Sp(B) = \{\lambda, \mu\}$.

Si $Sp(B) = \{\lambda, \mu\}$ alors B est diagonalisable et semblable à D, donc semblable à A.

On en conclut que $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables si, et seulement si, } Sp(B) = \{\lambda, \mu\}}$.

5. **a.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

A est triangulaire donc $Sp(A) = \{1,2\}$.
D'après **4b.**, A et B sont semblables si, et seulement si, $Sp(B) = \{1,2\}$.
Comme B est triangulaire, $Sp(B) = \{X,Y\}$.
On en déduit que A et B sont semblables $\Leftrightarrow$ $[X = 1, Y = 2] \cup [X = 2, Y = 1]$ est réalisé.
Par incompatibilité des deux événements, la probabilité de cette réunion est égale à :
$P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1)$
Comme X et Y sont indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p = q$,
$P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = 2P(X = 1)P(Y = 2)$.

Finalement, $\boxed{\text{la probabilité que } A \text{ et } B \text{ soient semblables est } 2p^2(1-p)}$.

b. On calcule la fréquence de réalisations de l'événement $[X = 1, Y = 2] \cup [X = 2, Y = 1]$ sur un grand nombre de réalisation de X et Y :

```python
def proba_A_B_semblables(p,N):
    c = 0
    for _ in range(N):
        X, Y = geometrique(p), geometrique(p)
        if (X == 1 and Y == 2) or (X == 2 and Y == 1):
            c += 1
    return c/N
```

En appliquant cette fonctions pour différentes valeurs de p, on vérifie le résultat précédent.