Retour Oral 3 - Chato 2023

1. Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, possédant une unique valeur propre λ réelle. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.
2. Sous python, définir une fonction `geometrique` prenant en entier un flottant `p` dans $]0,1[$ et simulant une variable de loi géométrique de paramètre `p`.

Soit p et q deux réels dans $]0,1[$, et X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométriques de paramètres respectifs p et q, et soit M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

3. (a) Montrer que M est inversible presque sûrement.
   (b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si l'évènement : $[X \neq Y]$ est observé.
   (c) i. Calculer la probabilité de l'évènement :«M est diagonalisable».
   ii. Retrouver informatiquement une valeur approchée de cette probabilité.
4. (a) Soit A, D, B trois matrices carrées de même format telles que A et B soient semblables à D. Montrer alors que A et B sont semblables.
   (b) Soit A et B deux matrices 2×2 à coefficients réels. On suppose que A possède 2 valeurs propres réelles distinctes notées λ, μ. Montrer que le A et B sont semblables si et seulement si B admet deux valeurs propres distinctes qui sont λ et μ.

On reprend les variables X et Y précédentes, et on suppose dans cette question que $p = q$.

5. (a) Quelle est la probabilité que les matrices $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables ?
   (b) Vérifier expérimentalement le résultat de la question précédente.