Sujet 15
Question de cours
Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Exercice

1. Par distributivité du produit matriciel, φ_A est une application linéaire.
De plus, le produit de deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels est une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels donc $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \varphi_A(M)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On conclut que $\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. **a.** •Si φ_A est bijectif alors $\forall N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \exists! M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ |\ \varphi_A(M)=N$.
En particulier pour $N=I_2$, $I_2\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\exists! A'\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ |\ \varphi_A(A')=I_2$ soit $AA'=I_2$ ce qui est la définition de A est inversible.
•Réciproquement, supposons que A soit inversible. Soit $N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors
$\varphi_A(M)=N\Leftrightarrow AM=N\Leftrightarrow M=A^{-1}N$. Ainsi $\forall N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$\exists! M=A^{-1}N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ |\ \varphi_A(M)=N$ donc φ_A est bijectif.
Par double implications, on a montré que $\boxed{\varphi_A \text{ est bijectif si, et seulement si, } A \text{ est inversible}}$.

   b. D'après ci-dessus, dans le cas où A est inversible et φ_A est bijectif, on a $\forall(M,N),\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$,
$\varphi_A(M)=N\Leftrightarrow M=A^{-1}N\Leftrightarrow M=\varphi_{A^{-1}}(N)$.
On en déduit que si A est inversible alors φ_A est bijectif et $\boxed{\varphi_A^{-1}=\varphi_{A^{-1}}}$.

3. Soit $M=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors
$$\varphi_A(M)=AM=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt\\ cx+dz & cy+dt\end{pmatrix}.$$
Soit $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\\ t'\end{pmatrix}$ les matrice colonnes des coordonnées de M et de $\varphi_A(M)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On a alors $\begin{cases} x'=ax+bz\\ y'=ay+bt\\ z'=cx+dz\\ t'=cy+dt\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\\ t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a&0&b&0\\ 0&a&0&b\\ c&0&d&0\\ 0&c&0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$.
On en déduit que
$$\boxed{\text{la matrice de } \varphi_A \text{ relativement à la base canonique } \mathcal{B} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est } \Gamma(a,b,c,d)=\begin{pmatrix} a&0&b&0\\ 0&a&0&b\\ c&0&d&0\\ 0&c&0&d\end{pmatrix}}.$$

4. **a.** On définit d'abord une fonction pour simuler une loi géométrique de paramètre p puis on construit le tableau $\Gamma(X,Y,Y,X)$:

```python
import random as rd
import numpy as np
def geom(p):
    rg = 1
    while rd.random() > p:
        rg += 1
    return rg
def Gamma(p):
    X, Y = geom(p), geom(p)
    G = np.zeros((4,4))
    for i in range(4):
        G[i,i] = X
    for i in [0,1]:
        G[i,i+2] = G[i+2,i] = Y
    return G
```

b. Comme $\Gamma(X,Y,Y,X)$ est une matrice carrée d'ordre 4, elle est inversible si, et seulement si, elle est de rang 4.

On calcule la proportion de matrices $\Gamma(X,Y,Y,X)$ de rang 4 pour un grand nombre de réalisation de ces matrices :

```python
def proba(p):
    N = 1000
    return sum([matrix_rank(Gamma(p)) == 4 for _ in range(N)])/N
```

Les instructions :

```python
for p in [0.2,0.5,0.7]:
    print(proba(p))
```

renvoient 0.889, 0.668 et 0.465.

c. En posant $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, on sait que $\Gamma(X,Y,Y,X)$ est la matrice de φ_A.

On sait aussi que $\Gamma(X,Y,Y,X)$ est inversible $\Leftrightarrow$ φ_A est bijectif et d'après **2a.**, φ_A est bijectif $\Leftrightarrow$ A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Finalement $\Gamma(X,Y,Y,X)$ est inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow X^2 - Y^2 \neq 0 \Leftrightarrow X \neq Y$ car X et Y sont à valeurs positives.

Calculons la probabilité du complémentaire : $X = Y$

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet d'écrire :

$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = n)$ or X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$.

On a alors, en posant $q = 1 - p$, $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (q^{n-1}p)^2 = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (q^2)^{n-1}$. On reconnait une série géométrique de raison $q \in]0,1[$ donc $P(X = Y) = \dfrac{p^2}{1-q^2} = \dfrac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \dfrac{p}{1+q} = \dfrac{p}{2-p}$

donc $P(X \neq Y) = 1 - \dfrac{p}{2-p} = \dfrac{2(1-p)}{2-p}$

On en déduit que $\boxed{\text{la probabilité que la matrice } \Gamma(X,Y,Y,X) \text{ soit inversible est égale à } \dfrac{2(1-p)}{2-p}}$.

Pour $p = 0,2 = \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{2(1-p)}{2-p} = \dfrac{8}{9} \approx 0,889$.

Pour $p = 0,5 = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2(1-p)}{2-p} = \dfrac{2}{3} \approx 0,667$.

Pour $p = 0,7 = \dfrac{7}{10}$, $\dfrac{2(1-p)}{2-p} = \dfrac{6}{13} \approx 0,461$.

$\boxed{\text{Les résultats sont en adéquations avec les valeurs estimées à la question précédente}}$.