

## Sujet 15

### Question de cours

Pour  $\alpha$  fixé, donner les solutions de l'équation  $\tan(x) = \tan(\alpha)$

### Exercice

Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On définit l'application  $\varphi_A$  sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi_A(M) = AM.$$

1. Montrer que  $\varphi_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2.
  - a. Montrer que  $\varphi_A$  est bijectif si, et seulement si,  $A$  est inversible.
  - b. Dans ce cas, déterminer l'application réciproque  $\varphi_A^{-1}$  de  $\varphi_A$ .
3. Montrer que la matrice de  $\varphi_A$  relativement à la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est la matrice :

$$\Gamma(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

4. Soit  $p \in ]0, 1[$ .  
Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre  $p$ .
  - a. Écrire une fonction Python d'argument un flottant  $p$  et qui renvoie le tableau numpy  $\Gamma(X, Y, Y, X)$ .
  - b. Sous Python, pour déterminer le rang d'un tableau numpy  $M$ , on pourra utiliser les instructions :

```
from numpy.linalg import matrix_rank  
matrix_rank(M)
```

Écrire une fonction Python qui permet d'estimer la probabilité que la matrice  $\Gamma(X, Y, Y, X)$  soit inversible.

Tester cette fonction avec différentes valeurs de  $p$ .

- c. Calculer la probabilité que la matrice  $\Gamma(X, Y, Y, X)$  soit inversible.  
Comparer avec les valeurs estimées à la question précédente.