Sujet 29
Question de cours

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. $\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice

1. **a.** Méthode des rectangles pour le calcul d'une intégrale : si h est une fonction continue sur $[0,1]$ alors $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$ est une valeur approchée de $\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.

On définit donc la fonction $h : x \mapsto x^k(1-x)^{m-k}$ et on renvoie R_n :

```
def I(k,m):
    def h(x):
        return x**k*(1-x)**(m-k)
    n = 100
    return sum([h(k/n) for k in range(n)])/n
```

Pour $k = 3$ et $m = 4$ on trouve $\boxed{I_{3,4} \approx 0{,}05}$.

b. Soit $m \in \mathbb{N}$. $I_{0,m} = \int_0^1 (1-x)^m\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{(1-x)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1$ donc $\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ I_{0,m} = \dfrac{1}{m+1}}$.

c. Soit $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant k < m$. $I_{k+1,m} = \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{m-k-1}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = x^{k+1}$ et $v = -\dfrac{(1-x)^{m-k}}{m-k}$, u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc, par intégrations pas parties,

$I_{k+1,m} = \left[-\dfrac{x^{k+1}(1-x)^{m-k}}{m-k}\right]_0^1 + \dfrac{k+1}{m-k}\int_0^1 x^k(1-x)^{m-k}\,\mathrm{d}x$.

On obtient ainsi : $\boxed{\forall (k,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 0 \leqslant k < m,\ I_{k+1,m} = \dfrac{k+1}{m-k} I_{k,m}}$.

d. On en déduit que : $I_{k,m} = \dfrac{k}{m-(k-1)} I_{k-1,m}$ et, de proche en proche,

$I_{k,m} = \dfrac{k}{m-(k-1)} \times \dfrac{k-1}{m-(k-2)} \times \cdots \times \dfrac{1}{m} \times I_{0,m}$.

On en conclut que : $\boxed{\forall (k,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant m,\ I_{k,m} = \dfrac{k!(m-k)!}{m!}\dfrac{1}{m+1}}$.

On a alors $I_{3,4} = \dfrac{3!}{4!}\dfrac{1}{5}$ donc $\boxed{I_{3,4} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05}$. Ce résultat est en adéquation avec celui de **1a**.

e. Soit $x \in [0,1]$, $\forall i \in \{1,\cdots,13\}$, on pose $Y_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i \leqslant x \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Alors $\forall i \in \{1,\cdots,13\}$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$ où $p_i = P(X_i \leqslant x)$.
Comme $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, $P(X_i \leqslant x) = x$ car $x \in [0,1]$.

De plus $Z_x = \sum_{i=1}^{13} Y_i$ et les $Y_1,\ldots,Y_{13}$ sont indépendantes car les $X_1,\ldots,X_{13}$ le sont.

On en déduit que $\boxed{Z_x \hookrightarrow \mathcal{B}(13,x)}$.

D'où $Z_x(\Omega) = \{0,\cdots,13\}$ et $\forall k \in \{0,\cdots,13\}$, $P(Z_x = k) = \binom{13}{k} x^k(1-x)^{13-k}$.

f. Comme M est égale à l'une des variables $X_1,\ldots,X_{13}$, $M(\Omega) = [0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. $P(M \leqslant x) = P(Z_x \geqslant 7) = \sum_{k=7}^{13} P(Z_x = k) = \sum_{k=7}^{13} \binom{13}{k} x^k(1-x)^{13-k}$.

On pose alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{k=7}^{13} \binom{13}{k} x^k(1-x)^{13-k} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$.

$F(0) = 0$ car $k > 0$ et $F(1) = 1$ car pour $k = 13$, $13-k = 0$. Donc F est continue en 0 et en 1.

Étant continue par ailleurs, F est continue sur $\mathbb{R}$. Comme F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1, on en déduit que F est bien la fonction de répartition d'une variable à densité.

On en déduit que $\boxed{M \text{ est une variable à densité}}$.

g. Une densité de M est donc définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} F'(x) \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Comme $M(\Omega) = [0,1]$, $\boxed{M \text{ admet une espérance}}$

et $E(M) = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xF'(x)\,\mathrm{d}x$.

Par intégration par parties, on obtient :

$E(M) = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$.

On a bien $\boxed{E(M) = 1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x}$.

h. D'après **b.**, $E(M) = 1 - \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=7}^{13} \binom{13}{k} x^k(1-x)^{13-k}\,\mathrm{d}x = 1 - \sum_{k=7}^{13} \binom{13}{k} \int_0^1 x^k(1-x)^{13-k}\,\mathrm{d}x$.

Donc $E(M) = 1 - \displaystyle\sum_{k=7}^{13} \binom{13}{k} I_{k,13}$.

Dans une boucle `for` et avec l'indication de l'énoncé, on calcule la somme $S = \displaystyle\sum_{k=7}^{13} \binom{13}{k} I_{k,13}$.

Alors $E(M) = 1 - S$:

```python
from scipy.special import binom
S = 0
for k in range(7,14):
    S += binom(13,k)*I(k,13)
print(1-S)
```

On obtient $\boxed{E(M) = 0,5005}$.