Sujet 29

Question de cours

Pour tous entiers naturels k et n, donner l'expression du coefficient binomial k parmi n

Exercice

Soit k et m deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant m$.

On considère l'intégrale $I_{k,m} = \int_0^1 x^k(1-x)^{m-k}\,\mathrm{d}x$

1. **a.** Écrire une fonction python prenant en argument des entiers k et m, qui renvoie une valeur approchée de $I_{k,m}$.
   On pourra utiliser la méthode des rectangles.
   Tester cette fonction avec $k = 3$ et $m = 4$.
   b. Pour tout entier natruel m, calculer $I_{0,m}$.
   c. Pour tous entiers k et m tels que $0 \leqslant k < m$, déterminer une relation entre $I_{k+1,m}$ et $I_{k,m}$.
   d. En déduire l'expression de $I_{k,m}$ en fonction de k et m pour tous entiers k et m tels que $0 \leqslant k \leqslant m$.
   Que vaut $I_{3,4}$?

2. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_{13}$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi uniforme sur $[0,1]$.

   On définit la variable aléatoire M égale à la médiane de $X_1, X_2, \ldots, X_{13}$ c'est-à-dire la 7 ème valeur des $X_1, X_2, \ldots, X_{13}$ rangés dans l'ordre croissant.

   a. Soit $x \in [0,1]$, on note Z_x le nombre de variables parmi $X_1, X_2, \ldots, X_{13}$ inférieures ou égales à x.
   Montrer que Z_x suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.
   b. En déduire la fonction de répartition F de M.
   On laissera sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
   En déduire que M est une variable à densité.
   c. Montrer que M admet une espérance et que $E(M) = 1 - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$.
   d. Après avoir importé la fonction `binom` du module `scipy.special`, l'instruction `binom`(n,k) renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
   En utilisant le résultat de la question **1d**., donner la valeur de $E(M)$ calculée sous Python.