1. **a.** Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, $\lambda > 0$ et $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$. Comme $U(\Omega) =]0,1[$, $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $P(X \leqslant x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln U \leqslant x\right) = P(U \geqslant e^{-\lambda x}) = 1 - F_U(e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$ car $e^{-\lambda x} \in]0,1[$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \quad\quad \text{sinon} \end{cases}$ et on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.

On en conclut que $\boxed{X = -\frac{1}{\lambda}\ln U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)}$.

b. On utilise ce qui précède :

```
import random as rd
import math as m
def minXY(l,μ):
    X = -m.log(rd.random())/l
    Y = -m.log(rd.random())/μ
    return min(X,Y)
```

c. Soit $Z = \min(X,Y)$. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$P(Z \leqslant x) = 1 - P(Z > x) = 1 - P(X > x, Y > x) = 1 - P(X > x)P(Y > x)$ car X et Y sont indépendantes.
Comme X et Y suivent une loi exponentielle de paramètre λ et μ respectivement,
$P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = e^{-\lambda x}$ et $P(Y > x) = 1 - P(Y \leqslant x) = e^{-\mu x}$
donc $P(Z \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}e^{-\mu x}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda+\mu)x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \quad\quad \text{sinon} \end{cases}$

et on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.
On en conclut que $\boxed{Z = \min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda+\mu)}$.

d. Soit $T = -Y$. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, $T(\Omega) = \mathbb{R}_-^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.
$P(T \leqslant x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y \leqslant -x) = e^{\mu x}$ car $-x > 0$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} e^{\mu x} \text{ si } x < 0 \\ 1 \quad \text{sinon} \end{cases}$.

Comme $F_T(0) = 1$, F_T est continue en 0, étant continue par ailleurs, F_T est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, F_T est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 donc F_T est la fonction de répartition d'une variable à densité.
On en conclut que $T = -Y$ est une variable à densité dont la densité est donnée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \begin{cases} \mu e^{\mu x} \text{ si } x < 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}}.$$

e. Comme X et Y sont indépendantes, X et $T = -Y$ sont indépendantes.
D'après le rappel, une densité de $X - Y = X + T$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{X-Y}(x) = f_{X+T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_T(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $f_X(x-t)f_T(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - t > 0 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < x \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow t < \min(0,x)$.

•Si $x > 0$ alors $f_X(x-t)f_T(t) \neq 0 \Leftrightarrow t < 0$
donc $f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda(x-t)}\mu e^{\mu t}\,\mathrm{d}t = \lambda\mu e^{-\lambda x}\int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda+\mu)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x}\left[e^{(\lambda+\mu)t}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x}$.

•Si $x \leqslant 0$ alors $f_X(x-t)f_T(t) \neq 0 \Leftrightarrow t < x$
donc $f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda(x-t)}\mu e^{\mu t}\,\mathrm{d}t = \lambda\mu e^{-\lambda x}\int_{-\infty}^{x} e^{(\lambda+\mu)t}\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x}\left[e^{(\lambda+\mu)t}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x}e^{(\lambda+\mu)x}.$$

Conclusion : une densité de $X - Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}.$$

f. On a alors $P(X \leqslant Y) = P(X - Y \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} h(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{0} e^{\mu x}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[e^{\mu x}\right]_{-\infty}^{0}.$$

On en conclut que $\boxed{P(X \leqslant Y) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}}$.

2. **a.** En notant C_i l'événement : "X_i est un creux",
$C_2 = [X_2 \leqslant X_1] \cap [X_2 \leqslant X_3]$ et $C_3 = [X_3 \leqslant X_2] \cap [X_3 \leqslant X_4]$.
X_1 et X_3 suivent la loi exponentielle de paramètre 1, X_2 et X_4 suivent la loi exponentielle de paramètre 2.
Pour estimer les probabilités des évenements C_2 et C_3, on évalue la fréquence de réalisations de ces évènements sur un grand nombre de réalisations de X_1, X_2, X_3 et X_4 :

```
def proba(N):
    c2, c3 = 0, 0
    for _ in range(N):
        X1, X3 = -m.log(rd.random()), -m.log(rd.random())
        X2, X4 = -m.log(rd.random())/2, -m.log(rd.random())/2
        if X2 <= X1 and X2 <= X3:
            c2 += 1
        if X3 <= X2 and X3 <= X4:
            c3 += 1
    return c2/N, c3/N
```

.

En choisissant $N = 100000$, on obtient des estimations des probabilités
$\boxed{P(C_2) \approx 0{,}5 \text{ et } P(C_3) \approx 0{,}2}$.

b. $P(C_2) = P([X_2 \leqslant X_1] \cap [X_2 \leqslant X_3]) = P(X_2 \leqslant \min(X_1, X_3))$
et $P(C_3) = P([X_3 \leqslant X_2] \cap [X_3 \leqslant X_4]) = P(X_3 \leqslant \min(X_2, X_4))$.
D'après **1c**., $\min(X_1, X_3) \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$ et $\min(X_2, X_4) \hookrightarrow \mathcal{E}(4)$.
D'après **1f**., $P(X_2 \leqslant \min(X_1, X_3)) = \dfrac{2}{2+2}$ et $P(X_3 \leqslant \min(X_2, X_4)) = \dfrac{1}{1+4}$.
On retrouve les valeurs estimées sous Python : $\boxed{P(C_2) = \dfrac{1}{2} \text{ et } P(C_3) = \dfrac{1}{5}}$.

3. **a.** L'événement "X_2 et X_3 sont dex creux" est l'événement :
$C_2 \cap C_3 = [X_2 \leqslant X_1] \cap [X_2 \leqslant X_3] \cap [X_3 \leqslant X_2] \cap [X_3 \leqslant X_4]$
$\quad = [X_2 \leqslant X_1] \cap [X_2 = X_3] \cap [X_3 \leqslant X_4]$.
Or les variables sont à densité donc $P(X_2 - X_3 = 0) = 0$ et $\boxed{P(C_2 \cap C_3) = 0}$.

b. L'événèment "X_4 est un creux" est l'événement $C_4 = [X_4 \leqslant X_3] \cap [X_4 \leqslant X_5]$
et l'événèment "X_8 est un creux" est l'événement $C_8 = [X_8 \leqslant X_7] \cap [X_8 \leqslant X_9]$
Comme les variables X_i sont indépendantes, $\boxed{\text{les événements } C_4 \text{ et } C_8 \text{ sont indépendants}}$.

c. On note N la variable aléatoire égale au nombre d creux parmi les 10 variables $X_4, X_8, \cdots, X_{40}$.

Pour tout $i \in \{1, \cdots, 10\}$, on note $Y_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_{4i} \text{ est un creux} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

D'après **2b**., $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et, d'après **3b**., les variables $Y_1, \cdots, Y_{10}$ sont indépendantes.

On en déduit que $\boxed{N = \sum_{i=1}^{10} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \dfrac{1}{2}\right)}$.