Oral 4 - SCAV 2023

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g, alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité $f*g$ définie par

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. Soient λ,μ deux réels strictement positifs.
   (a) Déterminer les lois des variables aléatoires $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ et $-\dfrac{1}{\mu}\ln(V)$.
   (b) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.
   Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X,Y)$.
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (d) Déterminer la loi de $-Y$.
   (e) Montrer qu'une densité de $X-Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x} & \text{si } x>0,\\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\mu x} & \text{si } x\leqslant 0.\end{cases}$$

   (f) Calculer alors la probabilité de l'événement $[X\leqslant Y]$.
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   - X_1,X_3,X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n\in\mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1
   - X_2,X_4,X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n\in\mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2.

   Si $i\geqslant 2$, on dit que l'événement « X_i est un creux » est réalisé si $[X_i\leqslant X_{i-1}]$ et $[X_i\leqslant X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.
   (a) À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements « X_2 est un creux » et « X_3 est un creux ».
   (b) Calculer la probabilité des deux événements précédents.
3. (a) Que vaut la probabilité de l'événement « X_2 et X_3 sont des creux » ?
   (b) Les événements « X_4 est un creux » et « X_8 est un creux » sont-ils indépendants ?
   (c) Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4,X_8,X_{12},\ldots,X_{40}$.