1. D'après le protocole, on effectue trois tirages avec remise dans l'urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges et Y_1 est le nombre de boules blanches tirées dans U_0.
Comme les tirages sont faits avec remise, ils sont indépendants et Y_1 est le nombre de succès (tirer une boule blanche) dans la répétition de 3 expériences de Bernoulli (tirer une boule dans U_0) indépendantes de même paramètre $\frac{1}{3}$.
On conclut que $\boxed{Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)}$.

2. De la même manière, sachant l'événement $[Y_n = k]$ réalisé, l'urne U_{n+1} contient k boules blanches et $3-k$ boules rouges.
La probabilité de tirer une boule blanche est donc $\frac{k}{3}$.
On en déduit que $\boxed{\text{la loi de } Y_{n+1} \text{ sachant } [Y_n = k] \text{ est la loi binomiale de paramètres } \left(3, \frac{k}{3}\right)}$.

3. On utilise la simulation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(3,p)$ et on fait varier le paramètre p :

```python
import random as rd
def Y(n):
    L = [1]
    for _ in range(n):
        p = L[-1]/3
        y = sum([rd.random() < p for _ in range(3)])
        L.append(y)
    return L
```

4. **a.** D'après **2.**, la somme $\sum_{j=0}^{3} jP_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)$ est l'espérance de la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{k}{3}\right)$

donc $\boxed{\sum_{j=0}^{3} jP_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = k}$.

b. Par définition, $E(Y_{n+1}) = \sum_{j=0}^{3} jP(Y_{n+1} = j)$ or, d'après la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements (SCE) $([Y_n = k])_{k\in[[0,3]]}$,
$P(Y_{n+1} = j) = \sum_{k=0}^{3} P(Y_n = k)P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)$.

$$\text{On en déduit que } E(Y_{n+1}) = \sum_{j=0}^{3} j\left(\sum_{k=0}^{3} P(Y_n = k)P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{3} P(Y_n = k)\left(\sum_{j=0}^{3} jP_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{3} kP(Y_n = k) \text{ ce qui est la définition de } E(Y_n).$$

On a bien $\boxed{E(Y_{n+1}) = E(Y_n)}$.

c. On en déduit que la suite $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Comme $E(Y_0) = 1$ on en conclut que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(Y_n) = 1}$.

5. On utilise encore la formule des probabilités totales associée au SCE $([Y_n = k])_{k\in[[0,3]]}$:
$b_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{3} P(Y_n = k)P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 1)$
et $c_{n+1} = P(Y_{n+1} = 2) = \sum_{k=0}^{3} P(Y_n = k)P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 2)$.
D'après **2.**, $P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = \binom{3}{j}\left(\frac{k}{3}\right)^j\left(\frac{3-k}{3}\right)^{3-j}$
donc $P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 1) = k\left(\frac{3-k}{3}\right)^2$ et $P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 2) = \left(\frac{k}{3}\right)^2(3-k)$.
On en déduit que $P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 1) = P_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 2) = 0$ pour $k = 0$ $k = 3$,
$P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1) = P_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 2) = \frac{4}{9}$ et $P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 2) = P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{9}$.

On a alors $b_{n+1} = \frac{4}{9}b_n + \frac{2}{9}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{2}{9}b_n + \frac{4}{9}c_n$.

On a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{3}(b_n + c_n)}$.

6. On en déduit que la suite $(b_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (b_0 + c_0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n + c_n) = 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geqslant 0$ et $c_n \geqslant 0$, on a $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant b_n \leqslant b_n + c_n$.

En passant à la limite, on en conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \text{ et donc } \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0}$.

7. Si l'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé alors l'urne U_n contient trois boules rouges donc les trois tirages dans U_n donnent nécessairement trois boules rouges et l'événement $[Y_{n+1} = 0]$ est réalisé.
On en déduit que $[Y_n = 0] \subset [Y_{n+1} = 0]$. De la même manière $[Y_n = 3] \subset [Y_{n+1} = 3]$.
On en déduit que $P(Y_n = 0) \leqslant P(Y_{n+1} = 0)$ et $P(Y_n = 3) \leqslant P(Y_{n+1} = 3)$.

On en conclut que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant a_{n+1}$ et $d_n \leqslant d_{n+1}$: $\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont croissantes}}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [0, 1]$ et $d_n \in [0, 1]$, étant croissantes et majorées,
$\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes}}$.

8. Par définition, $\forall n \in \mathbb{N},\ E(Y_n) = b_n + 2c_n + 3d_n$ et, d'après **4c.**, $b_n + 2c_n + 3d_n = 1$.

En passant à la limite, et en utilisant le résultat de **6.**, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{3}}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ ([Y_n = k])_{k\in[[0,3]]}$ est un SCE, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n + c_n + d_n = 1$.

En passant à la limite, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}}$.

À long terme, $\boxed{\text{l'urne ne sera constituée que de boules de la même couleur}}$
$\boxed{\text{avec deux fois plus de chances que les boules soient rouges}}$.

9. **a.** Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ [Y_k = 0] \subset [Y_{k+1} = 0]$ et $[Y_k = 3] \subset [Y_{k+1} = 3]$,
$[T > n] = [Y_n = 1] \cup [Y_n = 2]$.
Comme ces événements sont incompatibles, $P(T > n) = b_n + c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (b_0 + c_0)$ d'après **5**.

Comme $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(T > n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

b. $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$P(T = n) = P(T > n - 1) - P(T > n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$.
On en conclut que :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T = n) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3} \text{ et on reconnait que } T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ donc } E(T) = 3}$.