Oral 5 - SCAV 2023

- On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la facon suivante. On effectue 3 tirages avec remise dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n. En particulier $Y_0 = 1$.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et $k \in \{0,1,2,3\}$. Déterminer la loi de Y_{n+1} sous la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{[Y_n=k]}$, c'est-à-dire calculer, pour tout $j \in \{0,1,2,3\}$: $\mathrm{P}_{[Y_n=k]}\left(Y_{n+1}=j\right)$.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et simulant les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$. La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste $[Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]$
4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que tout $k \in \{0,1,2,3\}$,
$$\sum_{j=0}^{3} j\, \mathrm{P}_{[Y_n=k]}\left(Y_{n+1}=j\right) = k.$$
   (b) En déduire que $\mathrm{E}\left[Y_{n+1}\right] = \mathrm{E}\left[Y_n\right]$.
   (c) En déduire l'expression de $\mathrm{E}\left[Y_n\right]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :
$$a_n = \mathrm{P}\left(Y_n = 0\right), \quad b_n = \mathrm{P}\left(Y_n = 1\right), \quad c_n = \mathrm{P}\left(Y_n = 2\right), \quad \text{et} \quad d_n = \mathrm{P}\left(Y_n = 3\right).$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{3}\left(b_n + c_n\right)$.
6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n).
7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.
8. À l'aide de la question 4 , montrer que (d_n) converge vers $1/3$. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.
   (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\mathrm{P}(T > n)$.
   (b) En déduire la loi de T et son espérance.