1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme produit d'une fonction polynôme et d'une fonction exponentielle, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kt^{k-1}}{k!} e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) e^{-t}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) e^{-t} = -\frac{t^n}{n!} e^{-t}.$$

On en duit que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(t) < 0$ donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Étant continue sur $\mathbb{R}_+$, f_n est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+)$.
Comme $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f_n(t) = 0$ par croissances comparées (polynôme-exponentielle),

$\boxed{f_n \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ vers }]0,1]}$.

b. Pour tout entier naturel n, la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ est la somme partielle de la série exponentielle de paramètre t. Cette série est convergente de somme égale à e^t.

On en déduit que : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 1}$.

2. **a.** Pour calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, on peut utiliser le calcul de $u_k = \frac{t^k}{k!}$ par récurrence :

$u_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \frac{t}{k+1} u_k$:

```python
import math as m
def f(n,t):
    u, s = 1, 1
    for k in range(n):
        u *= t/(k+1)
        s += u
    return s*m.exp(-t)
```

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f_n est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0,1]$,
$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in]0,1]$, $f_n^{-1}(x) = t \Leftrightarrow f_n(t) = x$.
On utilise donc l'algorithme de dichotomie pour renvoyer une valeur approchée à 10^{-3} près de l'unique solution à l'équation $f_n(t) = x$.
On choisit arbitrairement $[0, 1000]$ comme intervalle de départ :

```python
def finv(n,x):
    def g(t):
        return f(n,t) - x
    a, b = 0, 1000
    while b-a > 1e-3:
        c = (a+b)/2
        if g(a)*g(c) > 0:
            a = c
        else:
            b = c
    return c
```

3. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])$ et, pour tout entier n, on pose $X_n = f_n^{-1}(X)$.

a. On utilise la fonction précédente :

```python
import random as rd
def X(n):
    u = rd.random()
    return finv(n,u)
```

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après **1a.**, $X_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
$P(X_n \leqslant t) = P(f_n^{-1}(X) \leqslant t) = P(X \geqslant f_n(t))$ car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $P(X_n \leqslant t) = 1 - F_X(f_n(t)) = 1 - f_n(t)$ car $f_n(t) \in]0,1]$.

On pose alors : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ F_{X_n}(t) = \begin{cases} 1 - f_n(t) \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$.

c. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(0) = 1$ donc $F_{X_n}(0) = 0$, F_{X_n} est continue sur $\mathbb{R}$.

Étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, $\boxed{F_{X_n} \text{ est la fonction de répartition d'une variable à densité}}$.

Une densité de X_n est alors donnée par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{X_n}(t) = \begin{cases} -f_n'(t) \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

et, d'après le calcul fait en **1a.**, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f_{X_n}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^n}{n!}e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$.

4. **a.** Soit $m \in \mathbb{N}$.

L'intégrale $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t}\, dt$ est impropre en $+\infty$.

Montrons par récurrence que : $\forall m \in \mathbb{N},\ I_m$ converge et $I_m = m!$:

Initialisation : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge et $I_0 = 1$ car on reconnait la densité d'une variable de loi exponentielle.

La propriété est initialisée.

Hérédité : supposons que I_m converge et $I_m = m!$.

On procède par intégration par parties pour étudier $I_{m+1} = \int_0^{+\infty} t^{m+1} e^{-t}\, dt$:

On pose $u = t^{m+1}$ et $v = -e^{-t}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{m+1}e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

Comme $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t}\, dt$ est convergente et $I_m = m!$ d'après l'hypothèse de récurrence,

I_{m+1} est convergente et $I_{m+1} = \left[-t^{m+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (m+1)\int_0^{+\infty} t^m e^{-t}\, dt = (m+1)I_m = (m+1)!$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ I_m \text{ converge et } I_m = m!}$.

b. • L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf_{X_n}(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n!}e^{-t}\, dt = \frac{1}{n!}I_{n+1} = \frac{1}{n!}(n+1)! = n+1$.

D'après **a.**, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf_{X_n}(t)|\, dt$ est convergente

donc $\boxed{X_n \text{ admet une espérance et } E(X_n) = n+1}$.

•L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f_{X_n}(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n!}e^{-t}\, dt = \frac{1}{n!}I_{n+2} = \frac{1}{n!}(n+2)! = (n+2)(n+1)$.

D'après **a.**, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f_{X_n}(t)|\, dt$ est convergente

donc X_n admet un moment d'ordre 2 et $E(X_n^2) = (n+2)(n+1)$.

Comme $E(X_n^2) - E(X_n)^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = (n+1)((n+2)-(n+1))$,

d'après le théorème de König-Huygens, $\boxed{X_n \text{ admet une variance et } V(X_n) = n+1}$.

5. **a.** Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ admet pour densité $f_{X_{n-1}}$

où $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{X_{n-1}}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Initialisation : pour $n = 1$ on a $S_1 = Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

donc $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{S_1}(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = f_{X_{n-1}}(t)$.

La propriété est initialisée.

Hérédité : supposons que $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ admette pour densité $f_{X_{n-1}}$

et montrons que $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} Y_i$ admet pour densité f_{X_n}.

Or $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$ et $Y_1, \cdots, Y_n$ sont indépendantes donc S_n et Y_{n+1} sont indépendantes.

Par convolution, S_{n+1} est une variable à densité dont une densité est définie par :

$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{S_{n+1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(x) f_{Y_{n+1}}(t-x)\,\mathrm{d}x$.

De plus, $f_{S_n}(x) f_{Y_{n+1}}(t-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ t - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant t$.

On en déduit que si $t < 0$ alors $f_{S_{n+1}}(t) = 0$

et si $t \geqslant 0$ alors $f_{S_{n+1}}(t) = \int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} e^{-(t-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-t}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-t}}{(n-1)!} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^t$.

On a bien $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{S_{n+1}}(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} e^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$: la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ admet pour densité } f_{X_{n-1}}}$.

b. Comme S_n a la même loi que X_{n-1}, d'après **4b.**, S_n admet une espérance, $E(S_n) = E(X_{n-1}) = n$, et une variance, $V(S_n) = V(X_{n-1}) = n$

On en déduit que $\overline{Y_n} = \frac{S_n}{n}$ admet une espérance, $E(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n} E(S_n) = 1$, et une variance, $V(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n}$.

La variable centrée réduite associée à $\overline{Y_n}$ est donc $\overline{Y_n}^* = \frac{\overline{Y_n} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

D'après le théorème central limit, la suite de variables $(\overline{Y_n}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite.

Comme $0{,}99 \leqslant \overline{Y_n} \leqslant 1{,}01 \Leftrightarrow -0{,}01\sqrt{n} \leqslant \overline{Y_n}^* \leqslant 0{,}01\sqrt{n} \Leftrightarrow |\overline{Y_n}^*| \leqslant 0{,}01\sqrt{n}$,

on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} P(0{,}99 \leqslant \overline{Y_n} \leqslant 1{,}01) = \lim_{n \to +\infty} 2\Phi(0{,}01\sqrt{n}) - 1$. On conclut alors que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(0{,}99 \leqslant \overline{Y_n} \leqslant 1{,}01) = 1}$.