Retour oral 26 - 2023

Pour tout entier naturel n, on note f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) \mathrm{e}^{-t}\,.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$.
   (b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} f_n(t)$ pour tout réel t.
   (c) Écrire en python une fonction `f(n,t)` qui prend en argument un entier naturel n et un réel positif t et qui renvoie la valeur de $f_n(t)$.
   (d) Écrire en python une fonction `finv(n,x)` qui prend en argument un entier naturel n et un réel $x \in]0, 1]$ et qui renvoie une valeur approchée de $f_n^{-1}(x)$ à 10^{-3} près.
   On pourra utiliser un algorithme de dichotomie.
   (e)
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$. On définit la variable aléatoire X_n par : $X_n(\omega) = f_n^{-1}(X(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   (a) Écrire en python une fonction `Xn()` permettant de simuler la variable X_n.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X_n.
   (c) En déduire une densité de probabilité.
3. (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^m\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $m!$.
   (b) En déduire que X_n admet une espérance et une variance et les calculer.
4. On considère une suite de variables