Remarque : Il y a une erreur dans l'énoncé : G est le gain de Max.

1. On représente l'urne initiale par la liste $[0, 1]$, dans une boucle `for`, on utilise la fonction `choice` du module `random` jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire :

```python
import random as rd
def X():
    urne = [0,1]  # 0 = blanche, 1 = noire
    nb_tirage = 1
    while rd.choice(urne) == 0:
        urne.append(1)
        nb_tirage += 1
    return nb_tirage
```

On aurait pu demander une valeur approchée de l'espérance de X :

```python
def EspX():
    N = 1000
    return sum([X() for _ in range(N)])/N
```

2. Je jeu peut s'arrêter à n'importe quel tirage à partir du premier : $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$.

On note N_i (resp.B_i) : "Max tire une boule noire (resp. Blanche) au i-ième tirage".

$[X = 1] = N_1$ donc $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$

Soit $n \geqslant 2$, $[X = n] = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n$.

La formule des probabilités composées donne :

$P(X = n) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)\cdots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-2}}(B_{n-1})P_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(N_n)$.

Or $P(B_1) = \dfrac{1}{2}$

et $\forall k \in [[2, n-1]]$, sachant que $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, Max a ajouté $k-1$ boules noires dans l'urne donc l'urne contient k boules noires et une blanche avant le k-ième tirage.

Ainsi $P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(B_k) = \dfrac{1}{k+1}$. On en déduit que : $P(X = n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n}{n+1}$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{n}{(n+1)!}}$ (vérifiée également pour $n = 1$).

3. $\boxed{G = \begin{cases} X \text{ si } X \text{ est pair} \\ -X \text{ si } X \text{ est impair} \end{cases} \text{ ou encore } G = (-1)^X X}$.

4. **a.** $\boxed{n^2 = (n+1)n - (n+1) + 1}$.

b. $G(\Omega) = \left\{(-1)^n n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

D'après le théorème de transfert, G admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum(-1)^n nP(X = n)$ est absolument convergente.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|(-1)^n nP(X = n)| = \dfrac{n^2}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)n - (n+1) + 1}{(n+1)!}$ d'après **a**.

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

On reconnait les termes généraux de séries exponentielles convergentes donc $\boxed{G \text{ admet une espérance}}$.

De plus, $E(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

Ainsi, $\boxed{E(G) = 1 - \dfrac{3}{e}}$.

5. On admet que G admet une variance non nulle et on note $V(G) = \sigma^2$.

On remarque sur le graphique une convergence de la suite des moyennes empiriques G_n vers une valeur négative de l'ordre de $-0,1$.

Les variables étant indépendantes et de même loi (celle de G), la loi faible des grands nombre permet d'affirmer que la suite des moyennes empiriques G_n converge en probabilité vers l'espérance $E(G) = 1 - \frac{3}{e} \approx -0.104$. $\boxed{\text{Cela semble normal}}$.

6. **a.** En notant $(X_i)_i$ une suite de variables indépendantes toutes de même loi que G, on a $G_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On sait que $E(X_i) = m = \frac{3}{e}$ et $V(X_i) = \sigma^2$ donc $E(G_n) = m = \frac{3}{e}$ et $V(G_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

On a aussi $G_n^* = \dfrac{G_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et le théorème central limit permet d'affirmer que $(G_n^*)_n$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc $\forall a \in \mathbb{R}$, une approximation de $P(-a \leqslant G_n^* \leqslant a) = P(|G_n^*| \leqslant a)$ est $\boxed{P(-a \leqslant G_n^* \leqslant a) \approx 2\Phi(a) - 1}$ où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

b. Comme $P(-a \leqslant G_n^* \leqslant a) = P\Big(G_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}a \leqslant m \leqslant G_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}a\Big)$.

Pour avoir une probabilité supérieur ou égale à $0,95$ il faut donc que $2\Phi(a) - 1 \geqslant 0,95 \Leftrightarrow a \geqslant \Phi^{-1}(0,975)$.

La calculatrice ou Python nous donne $\Phi^{-1}(0,975) \approx 1,96$.

On obtient alors $P\left(G_n - 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant m \leqslant G_n + 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de choisir n tel que $1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon$ soit $\boxed{n \geqslant \dfrac{1,96\sigma}{\varepsilon}}$.