Planche 15

Question de cours.

Donner la définition de distance d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Exercice.

Max et Jojo jouent avec une urne qui contient 2 boules : une boule noire et une boule blanche. À chaque tour, Max tire une boule :

* si la boule tirée est noire, le jeu s'arrête
* si elle est blanche Max remet la boule dans l'urne et y ajoute une boule noire.

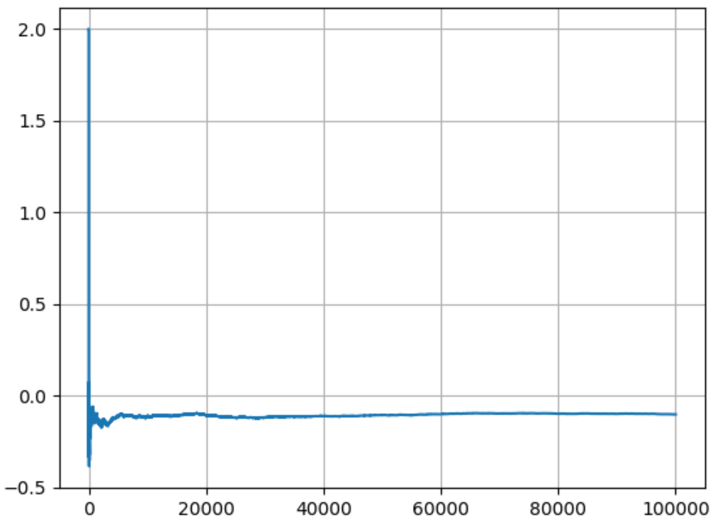
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués à la fin de la partie et G le gain de Jojo.

* Si X vaut n et est impair, Max donne n euros à Jojo.
* Si X vaut n et est pair, Jojo donne n euros à Max.

1. Écrire un programme permettant de simuler une partie.
2. Déterminer la loi de X.
3. Exprimer G simplement en fonction de X. La variable G admet-elle une espérance ?
4. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que : $n^2 = a(n+1)n + b(n+1) + c$.
   (b) En déduire l'espérance m de G.

Dans la suite, on admet que G possède une variance non nulle notée σ^2.

5. On effectue un grand nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de parties et on note G_n la moyenne empirique du gain. On obtient le graphique suivant représentant les valeurs de G_n obtenues au cours de 100000 parties.



   Commenter le graphique, cela vous semble-t-il normal ?
6. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n^* la variable centrée réduite associée à G_n.
   Donner une approximation, pour n est assez grand, de $\mathrm{P}(-a \leqslant G_n^* \leqslant a)$ pour $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer alors une valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ telle que l'intervalle $I = [G_n - \varepsilon; G_n + \varepsilon]$ constitue un intervalle de confiance de m de niveau 95%, c'est-à-dire tel que :

$$\mathrm{P}(m \in I) \geqslant 0,95.$$