1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

λ est valeur propre de $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow K_1 - \lambda I_2$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \det(K_1 - \lambda I_2) = 0.$

Or $\det(K_1 - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$. Ainsi, $\boxed{\text{dans } \mathbb{C},\ Sp(K_1) = \{-i, i\} \text{ dans } \mathbb{R},\ Sp(K_1) = \emptyset}$.

On en déduit que, admettant deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ et aucune dans $\mathbb{R}$, $\boxed{K_1 \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C} \text{ mais pas sur } \mathbb{R}}$.

2. On utilise les tableaux du module `numpy`. Attention au décalage d'indice :

```
import numpy as np
def K(n):
    M = np.zeros((n+1,n+1))
    for i in range(n):
        M[i,i+1] = i+1
    for j in range(n):
        M[j+1,j] = -n+j
    return M
```

3. On utilise la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` et une boucle `for`. Les réusltats sont peu exploitables à cause du grand nombre de chiffres après la virgule. On va plutôt renvoyer des arrondis :

```
import numpy.linalg as la
for n in range(1,11):
    L = la.eigvals(K(n))
    V = [round(x,3) for x in L]
    print('Sp(K',n,') = ', V)
```

On obtient les résultats suivants :

$Sp(K1) = [1j, -1j]$
$Sp(K2) = [2j, -2j, (-0+0j)]$
$Sp(K3) = [3j, -3j, 1j, -1j]$
$Sp(K4) = [4j, -4j, (-0+0j), 2j, -2j]$
$Sp(K5) = [(-0+5j), (-0-5j), 3j, -3j, 1j, -1j]$
$Sp(K6) = [(-0+6j), (-0-6j), 4j, -4j, (-0+0j), 2j, -2j]$
$Sp(K7) = [(-0+7j), (-0-7j), 5j, -5j, 1j, -1j, 3j, -3j]$
$Sp(K8) = [8j, -8j, 6j, -6j, (-0+4j), (-0-4j), 0j, (-0+2j), (-0-2j)]$
$Sp(K9) = [(-0+9j), (-0-9j), 7j, -7j, (-0+5j), (-0-5j), 1j, -1j, (-0+3j), (-0-3j)]$
$Sp(K10) = [10j, -10j, 8j, -8j, 6j, -6j, 4j, -4j, 0j, (-0+2j), (-0-2j)]$

qu'on peut résumer en : $\boxed{Sp(K_n) = \{(n-2k)i,\ k \in [\![0, n]\!]\}}$.

4. **a.** Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \cos^n x + \lambda_1 \cos^{n-1} x \sin x \cdots + \lambda_n \sin^n x = 0$

Comme $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos^n x \neq 0$ donc, en divisant par $\cos^n x$, on obtient :

$\boxed{\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 \tan x + \cdots + \lambda_n \tan^n x = 0}$.

b. Comme la fonction tangente est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$, en posant $t = \tan x$, on obtient :

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n = 0.$

Comme la fonction $t \mapsto \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$ est une fonction polynôme,

$\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0.$

D'où $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0$ et $\mathcal{B}_n = (f_0, \cdots, f_n)$ est une partie libre.

Étant aussi une partie génératrice de V_n,

$\boxed{\mathcal{B}_n = (f_0, \cdots, f_n) \text{ est une base de } V_n \text{ et donc } \dim V_n = n+1}$.

c. Par linéarité de la dérivation, φ_n est un morphisme.
Les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont toutes dérivables sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
$f_0(x) = \cos^n x$ donc $f_0'(x) = -n\cos^{n-1}x\sin x = -nf_1(x)$,
$f_n(x) = \sin^n x$ donc $f_n'(x) = n\cos x\sin^{n-1}x = nf_{n-1}(x)$,
et $\forall k \in [[1, n-1]]$, $f_k(x) = \cos^{n-k}x\sin^k x$ donc
$f_k'(x) = -(n-k)\cos^{n-k-1}x\sin^{k+1}x + k\cos^{n-k+1}x\sin^{k-1}x$
On en déduit que : $\varphi_n(f_0) = -nf_1$, $\varphi_n(f_n) = nf_{n-1}$
et $\forall k \in [[1, n-1]]$, $\varphi_n(f_k) = -(n-k)f_{k+1} + kf_{k-1}$.
Finalement, $\forall k \in [[0, n]]$, $\varphi_n(f_k) \in V_n$ donc $\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } V_n}$.

Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -(n-1) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = K_n}$.

d. Soit $k \in [[0, n]]$ et $x \in \mathbb{R}$. $g_k(x) = e^{i(n-2k)x} = (e^{ix})^{n-k-k} = (e^{ix})^{n-k}(e^{-ix})^k$.
Comme $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ et $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, on a bien :
$\boxed{\forall k \in [[0, n]],\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^{n-k}(\cos x - i\sin x)^k}$.

e. On applique la formule du binôme pour développer $g_k(x)$: $\forall k \in [[0, n]]$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$g_k(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} i^{n-k-j}\cos^j x\sin^{n-k-j}x\right)\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-i)^{k-l}\cos^l x\sin^{k-l}x\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\binom{n-k}{j}\binom{k}{l} i^{n-k-j}(-i)^{k-l}\cos^{j+l}x\sin^{n-(j+l)}x = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\binom{n-k}{j}\binom{k}{l} i^{n-k-j}(-i)^{k-l}f_{n-(j+l)}(x).$$
Comme $\forall j \in [[0, n-k]]$, $\forall l \in [[0, k]]$, $n-(j+l) \in [[0, n]]$,
g_k est combinaison linéaire de $f_0, \cdots, f_n$.
On en conclut que : $\boxed{\forall k \in [[0, n]],\ g_k \in V_n}$.

f. Soit $k \in [[0, n]]$, g_k est dérivable et $g_k'(x) = i(n-2k)e^{i(n-2k)x}$ donc $\varphi_n(g_k) = i(n-2k)g_k$.
On en déduit que $\boxed{Sp(\varphi_n) = \left\{i(n-2k),\ k \in [[0, n]]\right\}}$.
Comme $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi_n) = K_n$, $\boxed{Sp(K_n) = \left\{i(n-2k),\ k \in [[0, n]]\right\}}$.

g. On en déduit que, dans $\mathbb{C}$, K_n possède $n+1$ valeurs propres distinctes.
Comme $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{la matrice } K_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$.

h. K_n est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de K_n.
Or $0 \in Sp(K_n) \Leftrightarrow \exists k \in [[0, n]] \mid n = 2k$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } K_n \text{ n'est pas inversible et si } n \text{ est impair, } K_n \text{ est inversible}}$.

i. Soit n un entier pair. $\ker\varphi_n = E_0(\varphi_n) = \{f \in V_n \mid \varphi_n(f) = 0\}$.
D'après **4.f.**, $\varphi_n(g_k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{n}{2}$ et comme les sous-espaces propres sont tous de dimension 1,
$E_0(\varphi_n) = \text{vect}\left(g_{\frac{n}{2}}\right)$.
Comme $g_{\frac{n}{2}}(x) = e^{i\left(n-2\frac{n}{2}\right)x} = 1$, on conclut que $\boxed{\ker\varphi_n = \text{vect}(1)}$.