Planche 1

Question de cours.

Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

Exercice.

Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!], (K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in [\![1, n]\!], (K_n)_{j+1,j} = -n - 1 + j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Écrire une fonction `K` en `Python` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n.
3. Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in [\![1, 10]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathscr{B}_n = (f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x) \sin^k(x).$$
On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$.
   (a) Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Montrer que
   $$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \cdots + \lambda_n \tan(x)^n = 0.$$
   (b) En déduire que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de V_n et la dimension de V_n.
   (c) Monter que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$.
   (d) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on note g_k la fonction définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n - 2k)x)$$
   Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k$.
   (e) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!], g_k$ appartient à V_n.
   Indication : On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j\right)\left(\sum_{l=0}^{k} b_l\right) = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} a_j b_l$.
   (f) En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n.
   (g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
   (h) Déterminer pour quelle valeur de n, la matrice K_n est inversible.
   (i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.