1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

L'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$ est impropre en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $I(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$.

$I(x) = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 1$ donc l'intégrale I est convergente.

On conclut que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2. Comme $1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, d'après ci-dessus,

$$\boxed{\text{la fonction de répartition de } X \text{ est définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

3. **a.** On a $V = \frac{U}{1-U} = \frac{1}{1-U} - 1$. Comme $U(\Omega) = [0,1[$, $V(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $P(V \leqslant x) = P\left(\frac{U}{1-U} \leqslant x\right) = P(U \leqslant x(1-U))$ car $1-U$ est positive

$= P(U(1+x) \leqslant x) = P\left(U \leqslant \frac{x}{1+x}\right)$ car $1+x > 0$.

Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1$, $P\left(U \leqslant \frac{x}{1+x}\right) = F_U\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x}{1+x}$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et on reconnaît la fonction F.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction de répartition de } V \text{ est égale à } F}$.

b. Deux variables qui ont même fonction de répartition ont même loi donc pour simuler X il suffit de simuler $V = \frac{U}{1-U}$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$:

```python
import random as rd
def X():
    U = rd.random()
    return U/(1-U)
```

4. **a.** **i.** On utilise la fonction $X()$ de **3b**. : on initialise k à 0, tant que $X > k$, on incrément k de 1 :

```python
def N(n):
    k = 0
    while k <= n and X() > k:
        k += 1
    return k
```

ii. Oen calcule la moyenne d'un grand nombre de réalisations de N_n :

```python
def espN(n):
    S = 1000
    return sum([N(n) for _ in range(S)])/S
```

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. $[N_n = n+1] = \bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k > k]$ donc, par indépendance des variables X_k,

$P(N_n = n+1) = \prod\limits_{k=0}^{n} P(X_k > k)$.

Or $\forall k \in \{0,1,\cdots,n\}$, $P(X_k > k) = 1 - P(X_k \leqslant k) = 1 - F(k) = 1 - \frac{k}{1+k} = \frac{1}{1+k}$.

On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_n = n+1) = \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{(n+1)!}}$.

On a $[N_n = 0] = [X_0 \leqslant 0] = 0$ et $\forall k \in \{1,\cdots,n\}$, $[N_n = k] = \left(\bigcap\limits_{i=0}^{k-1} [X_i > i]\right) \bigcap [X_k \leqslant k]$

donc $P(N_n = k) = \prod\limits_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1+i} \times \frac{k}{1+k} = \frac{1}{k!} \times \frac{k}{1+k}$ (valable aussi si $k = 0$).

On a bien : $\boxed{\forall k \in \{0,1,\cdots,n\},\ P(N_n = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$.

c. **i.** L'univers image $N_n(\Omega) = \{0, \cdots, n+1\}$ est fini donc $\boxed{N_n \text{ admet une espérance}}$ et, par définition, $E(N_n+1) = \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)P(N_n = k)$. On en déduit que

$$E(N_n+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)k}{(k+1)!} + \frac{n+2}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(N_n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}}$.

ii. Par linéarité de l'espérance, $\boxed{E(N_n) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 1}$. Comme $\frac{1}{k!}$ est le terme général de la série exponentielle de paramètre 1, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(N_n) = e-1}$.

5. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > n$. $[Y_n > x] = \bigcup_{k=0}^{n+1}\Big[\ [N_n = k] \cap [X_k > x]\Big]$. Comme $x > n$, $\forall k \leqslant n$, $[N_n = k] \cap [X_k > x]$ sont incompatibles donc il reste $[Y_n > x] = [N_n = n+1] \cap [X_{n+1} > x]$.
On a bien $\boxed{[Y_n > x] = [X_0 > 0] \cap [X_1 > 1] \cap \cdots \cap [X_n > n] \cap [X_{n+1} > x]}$.

b. Tout d'abord, comme $\forall k \in \mathbb{N},\ X_k(\Omega) = \mathbb{R}^+,\ Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
D'après ci-dessus, si $x > n$ alors, d'après **4b**. et par indépendances des variables X_k,
$P(Y_n > x) = \frac{1}{(n+1)!}(1 - F(x)) = \frac{1}{(n+1)!(1+x)}$.
Si $x \leqslant n$, à l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N_n = k])_{k\in\{0,\cdots,n+1\}}$, on obtient $P(Y_n > x) = \sum_{k=0}^{n+1} P([N_n = k] \cap [Y_n > x])$.
Or $P([N_n = k] \cap [Y_n > x]) = P([N_n = k] \cap [X_k > x])$.
Si $k = 0$ alors $P([N_n = 0] \cap [Y_n > x]) = P([X_0 \leqslant 0] \cap [X_0 > x]) = 0$.
Si $k = n+1$ alors

$$P([N_n = n+1] \cap [Y_n > x]) = P\left(\left(\bigcap_{k=0}^{n}[X_k > k]\right) \cap [X_{n+1} > x]\right) = \frac{1}{(n+1)!}(1-F(x)) = \frac{1}{(n+1)!(1+x)}.$$

Si $1 \leqslant k \leqslant n$ alors $P([N_n = k] \cap [X_k > x]) = P\left(\left(\bigcap_{i=0}^{k-1}[X_i > i]\right) \cap [x < X_k \leqslant k]\right)$
Si $k \leqslant x$ alors $[x < X_k \leqslant k]$ est un événement impossible donc $P([N_n = k] \cap [X_k > x]) = 0$.
Si $k > x$, c'est-à-dire si $k \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$,
alors $P([N_n = k] \cap [X_k > x]) = \frac{1}{k!}(F(k) - F(x)) = \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{1+k} - \frac{x}{1+x}\right)$.
Donc

$$\begin{aligned}
P(Y_n > x) &= \sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{1+k} - \frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{(n+1)!(1+x)} \\
&= \sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} - \frac{x}{1+x}\sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!(1+x)} \\
&= \sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) - \frac{x}{1+x}\sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!(1+x)} \\
&= \sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) - \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!(1+x)} \\
&= \frac{1}{(\lfloor x\rfloor+1)!} - \frac{x}{1+x}\sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n+1} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

Comme $P(Y_n \leqslant x) = 1 - P(Y_n > x)$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{(\lfloor x\rfloor+1)!} + \frac{x}{1+x}\sum_{k=\lfloor x\rfloor+1}^{n+1} \frac{1}{k!} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 - \frac{1}{(n+1)!(1+x)} & \text{si } x > n \end{cases}.$$

c. $F_{Y_n}(0) = 0$ donc la fonction est continue en 0.
$F_{Y_n}(n) = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{n}{1+n}\dfrac{1}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!(n+1)}$ donc la fonction est continue en n.
Étant continue par ailleurs, F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que F_{Y_n} est la fonction de répartition d'une variable à densité et donc, que $\boxed{\text{la variable } Y_n \text{ est une variable à densité}}$.