Sujet 8

Question de cours
Donner le développement limité à l'ordre 5 et au voisinage de 0 de $\cos(x)$

Exercice
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartion de X.

3. Soit U une variable suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. On pose $V = \dfrac{U}{1-U}$.
   a. Montrer que la fonction de répartition de V est égale à F.
   b. Déduire une fonction sur Python permettant de simuler une variable X.

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X.
   Pour tout entier naturel n, on définit la variable N_n par :
   $$N_n = \begin{cases} k \text{ où } k \text{ est le plus petit entier de } \{0,1,\cdots,n\} \text{ tel que } X_k \leqslant k \text{ si un tel } k \text{ existe} \\ n+1 \text{ sinon} \end{cases}.$$
   a. **i.** Écrire une fonction Python d'argument un entier n permettant de simuler la variable N_n.
   ii. Écrire une fonction Python d'argument un entier n permettant d'évaleur l'espérance de N_n.
   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{(n+1)!}$ et $\forall k \in \{0,1,\cdots,n\},\ P(N_n = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$.
   c. **i.** Justifier que N_n admet une espérance et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ E(N_n+1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}$.
   ii. En déduire l'expression de $E(N_n)$ et calculer la limite de $E(N_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire Y_n par :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ \text{si } N_n(\omega) = k \text{ alors } Y_n(\omega) = X_k(\omega).$$
   a. Soit $x > n$, justifier que $[Y_n > x] = [X_0 > 0] \cap [X_1 > 1] \cap \cdots \cap [X_n > n] \cap [X_{n+1} > x]$.
   b. En utilisant la formule des probabilités totales dans sa forme avec les intersections d'événements, déterminer $P(Y_n > x)$ en distinguant selon la valeur de x.
   En déduire la fonction de répartition de Y_n.
   c. La variable Y_n est elle une variable à densité ?