1. La seule chose qui compte pour les boîtes A et B, c'est le nombre de pastilles qu'elles contiennent. On effectue au plus $2N$ tirages et on s'arrête dès que l'on choisit une boîte vide :

```
import random as rd
def X(N):
    a, b = N, N
    for _ in range(2*N):
        if rd.choice(['A','B']) == 'A':
            if a == 0:
                return b
            else:
                a -= 1
        else:
            if b == 0:
                return a
            else:
                b -= 1
    return max(a,b)
```

2. X_N peut prendre la valeur 0 s'il ne reste plus qu'une pastille et qu'on choisit la boîte qui la contient.
X_N peut prendre la valeur N si on choisit à chaque tour la même boîte.
Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles donc $\boxed{X_N(\Omega) = [[0, N]]}$.

3. **a.** Soit $k \in [[0, N]]$.
L'événement $[X_N = k]$ est réalisé si, et seulement si, on choisit N fois l'une des deux boîtes et $N-k$ fois l'autre boîte.
On effectue donc $2N-k$ tirages indépendants au cours desquels on choisit N fois une boîte (succès de probabilité $\frac{1}{2}$) et $N-k$ l'autre boîte (échec de probabilité $\frac{1}{2}$).
On reconnait un schéma binomial et donc $P(X_N = k) = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^N\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}$.
On a bien : $\boxed{\forall k \in [[0, N]],\ P(X_N = k) = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}}$.

b. Pour $k = N+1$, $\binom{2N-(N+1)}{N} = \binom{N-1}{N} = 0$.
Comme $X_N(\Omega) = [[0, N]]$, $P(X_N = N+1) = 0$:
$\boxed{\text{la relation précédente est vraie pour } k = N+1}$.

4. Soit $k \in [[0, N]]$.

$$2(N-k)P(X_N = k) = 2(N-k)\binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k} = 2(N-k)\frac{(2N-k)!}{N!(N-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$$
$$= \frac{(2N-k)!}{N!(N-k-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k-1} = (2N-k)\frac{(2N-(k+1))!}{N!(N-(k+1))!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-(k+1)}$$
$$= (2N-k)\binom{2N-(k+1)}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-(k+1)} = (2N-k)P(X_N = k+1).$$

Comme $2N-k = 2N+1-(k+1)$,
on a bien : $\boxed{\forall k \in [[0, N]],\ 2(N-k)P(X_N = k) = (2N+1)P(X_N = k+1) - (k+1)P(X_N = k+1)}$.

5. Comme $X_N(\Omega) = [[0, N]]$, X_N admet une espérance
et $E(X_n) = \sum_{k=1}^{N} kP(X_N = k) = \sum_{k=0}^{N-1}(k+1)P(X_N = k+1)$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}[(2N+1)P(X_N = k+1) - 2(N-k)P(X_N = k)]$$
$$= (2N+1)\sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k+1) - 2N\sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k) + 2\sum_{k=0}^{N-1} kP(X_N = k)$$
$$= 2N\sum_{k=0}^{N-1}[P(X_N = k+1) - P(X_N = k)] + \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k+1) + 2\sum_{k=0}^{N-1} kP(X_N = k)$$
$$= 2N[P(X_N = N) - P(X_N = 0)] + \left[\sum_{k=0}^{N} P(X_N = k) - P(X_N = 0)\right] + 2\left[\sum_{k=0}^{N} kP(X_N = k) - NP(X_N = N)\right]$$
$$= 2NP(X_N = N) - 2NP(X_N = 0) + 1 - P(X_N = 0) + 2E(X_N) - 2NP(X_N = N)$$

On en déduit que $\boxed{E(X_N) = (2N+1)P(X_N = 0) - 1}$.

6. On a alors $E(X_N) = (2N+1)\binom{2N}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N} - 1 = (2N+1)\frac{(2N)!}{(N!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N} - 1$.

En utilisant l'équivalent fourni, on a:

$$E(X_N) + 1 \underset{N\to+\infty}{\sim} (2N+1)\frac{\sqrt{4N\pi}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}}{2N\pi\left(\frac{N}{e}\right)^{2N}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N} = \frac{2N+1}{2N}2\sqrt{\frac{N}{\pi}}.$$

D'où $E(X_N) + 1 \underset{N\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}$.

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} = +\infty$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\frac{N}{\pi}}} = 0$ donc $\boxed{E(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}}$.

7. De manière analogue à ce qui a été fait dans la question **3**.

Y_N ne peut pas prendre la valeur 0 car sinon, on aurait déjà arrêter les tirages mais prendre la valeur 1 s'il ne reste plus qu'une pastille en tout.

Y_N peut prendre la valeur N si on choisit à chaque tour la même boîte.

Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles donc $Y_N(\Omega) = [[1,N]]$.

Soit $k \in [[1,N]]$.

$[Y_N = k]$ est réalisé si, et seulement si, au cours des $2N-k-1$ premiers tirages, on a choisit $N-1$ fois l'urne A (ou B), $N-k$ l'urne B (ou A) puis on choisit une dernière fois l'urne A (ou B).

On en déduit que $P(Y_N = k) = \binom{2N-k-1}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}\frac{1}{2}$.

On a alors : $\boxed{\forall k \in [[1,N]],\ P(Y_N = k) = \binom{2N-k-1}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}}$.