Retour Oral 23 - Chato 2023

Soit $N \geq 1$ un entier. On dispose de deux boites A et B contenant chacune N pastilles. On choisit une boite au hasard, puis on tire sans remise une pastille de cette boite. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'une boite soit vide. On continue d'extraire des pastilles jusqu'à ce que l'on ait sélectionné la boite déjà vide, et on note X_N la variable aléatoire égale au nombre de pastilles restant dans l'autre boite à ce moment.

1. Simuler la variable aléatoire X_N sous python.
2. Déterminer l'univers image de la variable aléatoire X_N.
3. (a) Montrer que pour $0 \leq k \leq N$: $P(X_N = k) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$.

   (b) La relation précédente est-elle vraie pour $k = N+1$?
4. Montrer que pour $0 \leq k \leq N$: $2(N-k)P(X_N = k) = (2N+1)P(X_N = k+1) - (k+1)P(X_N = k+1)$.
5. En déduire que $E(X_N) = (2N-1)P(X_N = 0) - 1$.
6. En admettant que $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer que $E(X_N) \underset{N\to\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}$.
7. On note Y_N la variable aléatoire égale au nombre de pastilles restant dans l'autre boite au moment où l'on vient de vider une boite. Déterminer la loi de Y_N.