1. Chacun des k clients chosit au hasard un fournisseur. On crée la liste L de longueur n de sorte que $L[i]$ soit égal au nombre d'ordinateurs vendus par le fournisseur $i+1$:

```
import random as rd
def LXi(n,k):
    L = n*[0]
    for _ in range(k):
        i = rd.randint(0,n-1)
        L[i] += 1
    return L
```

2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, on pose $C_j = \begin{cases} 1 \text{ si le } j\text{-ième client choisit le fournisseur } i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Les variables C_j sont indépendantes (les choix des clients sont indépendants) et suivent toutes une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ puisque le choix d'un fournisseur se fait au hasard.

On a alors $X_{ik} = \sum_{j=1}^{k} C_j$ et $\boxed{X_{ik} \text{ suit une loi binomiale de paramètres } \left(k, \frac{1}{n}\right)}$.

3. Comme il y a n fournisseurs, pour que tous les fournisseurs aient vendu au moins un ordinateur, il faut au moins n clients.
Ainsi, pour $k \geqslant n$, $[T = k]$ est réalisé si, et seulement si, k est le plus petit entier tel que :
$\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_{ik} \neq 0$:

```
def T(n):
    k = n
    while 0 in LXi(n,k):
        k += 1
    return k
```

4. Soit $n = 3$ et A_k : "au moins un fournisseur n'a pas vendu d'ordinateurs aux k premiers clients".

   a. A_k est réalisé si l'un des trois fournisseurs a vendu 0 ordinateurs aux k premiers clients :
   $\boxed{A_k = [X_{1k} = 0] \cup [X_{2k} = 0] \cup [X_{3k} = 0]}$.

   b. On en déduit que $P(A_k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{3} [X_{ik} = 0]\right)$. La formule du crible de Poincaré donne :
   $$P(A_k) = \sum_{i=1}^{3} P([X_{ik} = 0]) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} P([X_{ik} = 0] \cap [X_{jk} = 0]) + P([X_{1k} = 0] \cap [X_{2k} = 0] \cap [X_{3k} = 0]$$
   Comme les variables X_{1k}, X_{2k} et X_{3k} suivent la même loi $\mathcal{B}\left(k, \frac{1}{3}\right)$, $P([X_{ik} = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$.
   De plus, $P([X_{1k} = 0] \cap [X_{2k} = 0]) = P(X_{3k} = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$
   et $P([X_{1k} = 0] \cap [X_{2k} = 0] \cap [X_{3k} = 0]) = 0$. On a bien : $\boxed{P(A_k) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k}$.

   c. D'après **3.**, $\boxed{T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![}$.

   d. Comme $[T > k] = A_k$, et $P(T = k) = P(T > k-1) - P(T > k)$,
   on a bien : $\boxed{\forall k \geqslant 3,\ P(T = k) = P(A_{k-1}) - P(A_k)}$.

   e. D'après **b.**, on a $\forall k \geqslant 3$,
   $$P(T = k) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^k + 3\left(\frac{1}{3}\right)^k = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$
   Finalement : $\boxed{\forall k \geqslant 3,\ P(T = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$.
   $\forall k \geqslant 3,\ kP(T = k) = k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.
   On reconnait les termes généraux de séries géométriques de raison $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ donc convergentes.
   Ainsi $\boxed{T \text{ admet une espérance}}$

$$E(T) = \sum_{k=3}^{+\infty} kP(T=k) = \sum_{k=3}^{+\infty}\left(k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) + 1$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 1 = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + 1 : \boxed{E(T) = \frac{11}{2}}.$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Par définition des variables aléatoires, $[Y_i = 1]$ est réalisé si, et seulement si, $X_{ik} = 0$.
Comme X_{ik} suit une loi binomiale de paramètres $\left(k, \frac{1}{n}\right)$, $P(X_{ik} = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$
On en déduit que $\boxed{Y_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}$.

6. Par définition de la variable Y, $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$ et donc $\boxed{E(Y) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}$.

7. Comme $Y_1 = 0$ si le fournisseur 1 a vendu des ordinateurs et $X = 0$ si le fournisseur 1 n'a pas vendu d'ordinateur, leur produit $\boxed{XY_1 \text{ est la variable nulle}}$.

8. Soit $i \in [[2, n]]$.

a. D'après **2.**, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right)$ donc $(XY_i)(\Omega) = [[0, k]]$.
Soit $j \in [[0, k]]$.
La formule des probabilités totales avec le SCE $([Y_i = 0], [Y_i = 1])$ donne :
$P(XY_i = j) = P(Y_i = 0)P_{[Y_i=0]}(XY_i = j) + P(Y_i = 1)P_{[Y_i=1]}(XY_i = j)$.
Or $P(Y_i = 1) = P(X_{ik} = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ et $P(Y_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$.
De plus, sachant $[Y_i = 0]$ réalisé, $[XY_i = 0]$ est réalisé donc $P_{[Y_i=0]}(XY_i = j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq 0 \\ 1 \text{ si } j = 0 \end{cases}$.
Enfin, $P_{[Y_i=1]}(XY_i = j) = P_{[Y_i=1]}(X = j) = \binom{k}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-j}$.
On en déduit que $\boxed{P(XY_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k}}$
et $\boxed{\forall j \in [[1, k]],\ P(XY_i = j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \binom{k}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-j}}$.

b. D'après le théorème de König-Huygens, $cov(X, Y_1) = E(XY_1) - E(X)E(Y_1)$.
On sait déjà que $E(X) = \frac{k}{n}$ car $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right)$
et $E(Y_1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ car $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$.
On calcule maintenant $E(XY_1)$ en utilisant sa définition :
$$E(XY_1) = \sum_{j=0}^{k} jP(XY_i = j) = \sum_{j=1}^{k} j\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \binom{k}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-j}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{k}{n} \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{j-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{j-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-j} \text{ car } j\binom{k}{j} = k\binom{k-1}{j-1}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{k}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^{j}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1-j} \text{ en posant } j \leftarrow j-1$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{k}{n} \text{ car } \left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^{k-1} = 1$$
On a alors $cov(X, Y_1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{k}{n} - \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ soit $\boxed{cov(X, Y_1) = 0}$.

c. On remarque que si le fournisseur 1 a vendu tous les ordinateurs alors le fournisseur i n'en a pas vendu donc l'événement $[X = k, Y_i = 0]$ est l'événement impossible, et $P(X = k, Y_i = 0) = 0$.
Par ailleurs $P(X = k) = \left(\frac{1}{n}\right)^k \neq 0$ et $P(Y_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \neq 0$ car $k > 0$.
On en conclut que $\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y_i \text{ ne sont pas indépendantes}}$.