Retour oral 26 - 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n fournisseurs de matériel informatique. On suppose que lors de l'achat d'un ordinateur, un client choisit un fournisseur au hasard. Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ et tout entier naturel non nul k, on notre X_{ik} la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs vendus par le fournisseur i aux k premiers clients. On étudie la variable aléatoire T égale au nombre de clients tels que tous les fournisseurs ont vendu au moins un ordinateur.

Première partie :

1. Écrire une fonction `pyhton` qui prend en argument l'entier n et un nombre de clients k et qui renvoie la matrice colonne contenant des simulations des variables aléatoires X_{ik}.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de X_{ik}.
3. Écrire une fonction `python` permettant de simuler T.
4. Dans cette question, on se place dans le cas $n = 3$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement A_k : « au moins un fournisseur n'a pas vendu d'ordinateur aux k premiers client ».
   (a) Exprimer A_k en fonction de $(X_{1k} = 0)$, $(X_{2k} = 0)$ et $(X_{3k} = 0)$.
   (b) Monter que $\mathrm{P}(A_k) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   (c) Déterminer l'univers image de T.
   (d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(T = k) = \mathrm{P}(A_{k-1}) - \mathrm{P}(A_k)$.
   (e) En déduire la loi de T et son espérance.

Deuxième partie : Dans cette partie, on suppose que le nombre de clients est égal à l'entier naturel non nul k.
On note X la variable aléatoire égale à. X : J'ai oublié Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le fournisseur i n'a pas vendu d'ordinateur, 0 sinon.
On note enfin Y la variable aléatoire égale au nombre de fournisseurs qui n'ont pas vendu d'ordinateurs.

5. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de Y_i.
6 Montrer que Y admet une espérance et que $\mathrm{E}(Y) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$.
7. Que dire de la variable aléatoire XY_i ?
8. déterminer la loi de la variable XY_i.
9. Calculer la covariance de (X, Y_i).