1. **a.** Sous réserve de convergence de la série double,

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} P(A=i,B=j) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{i+j-2} = p^2\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^{j-1}.$$

On reconnait des séries géométriques de raison $1-p \in]0,1[$ donc convergentes.

Ainsi, $\boxed{\text{la série double est convergente}}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} P(A=i,B=j) = p^2\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right)^2$.

On a bien : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} P(A=i,B=j) = 1}$.

b. La première loi marginale du couple (A,B) est donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(A=i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A=i,B=j) = p^2(1-p)^{i-1}\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^{j-1}.$$

Ainsi : $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(A=i) = p(1-p)^{i-1} \text{ et } A \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$.

c. Fonction classique du cours :

```python
import random as rd
def A(p):
    a =1
    while rd.random() > p:
        a += 1
    return a
```

On calcule la fréquence de réalisation de l'événement "A est pair" pour un grand nombre de réalisations de A :

```python
def proba_A_pair(p):
    N = 1000
    c = 0
    for _ in range(N):
        if A(p) % 2 == 0:
            c += 1
    return c/N
```

d. On note D l'événement "A est pair".

$$P(D) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A=2i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{2i-1} = p(1-p)\sum_{i=1}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^{i-1}$$

$$= p(1-p)\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{p(2-p)}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité de l'événement "}A\text{ est pair" est } P(D) = \dfrac{1-p}{2-p}}$.

2. Soit $(E)\ :\ y'' + Ay' + B^2y = 0$.

a. $\boxed{\text{L'équation caractéristique de } (E) \text{ est } (\mathcal{C})\ :\ x^2 + Ax + B^2 = 0 \text{ dont le discrimanant vaut } \Delta = A^2 - 4B^2}$

b. Si $\Delta > 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet deux racines réelles distinctes

$r_1 = -\dfrac{A + \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2}$ et $r_2 = -\dfrac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2}$

alors $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.

Si $\Delta = 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet une unique racine réelle $r_0 = -\dfrac{A}{2}$

alors $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$.

Dans ces deux cas, les racines r_0, r_1 et r_2 sont presque sûrement négatives donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Si $\Delta < 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet deux racines complexes conjuquées

$r_1 = -\dfrac{A + i\sqrt{4B^2 - A^2}}{2}$ et $r_2 = -\dfrac{A - i\sqrt{4B^2 - A^2}}{2}$

alors $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{-\frac{A}{2}t}\left(\lambda\cos\left(\dfrac{\sqrt{4B^2 - A^2}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\dfrac{\sqrt{4B^2 - A^2}}{2}t\right)\right)$.

Là aussi, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ car $-\dfrac{A}{2}$ est presque sûrement négative.

On en conclut effectivement que $\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sont presque sûrement bornées sur } \mathbb{R}^+}$.

3. **a.** $\Delta = 0 \Leftrightarrow A = 2B$ car A et B sont à valeurs positives.

Donc $P(\Delta = 0) = P(A = 2B) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A = 2j, B = j) = p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} (1-p)^{3j-2}$

$$= p^2(1-p)\sum_{j=1}^{+\infty}\left((1-p)^3\right)^{j-1} = \frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^3} = \frac{p^2(1-p)}{3p-3p^2+p^3}.$$

Conclusion : $\boxed{P(\Delta = 0) = \dfrac{p(1-p)}{3-3p+p^2}}$.

b. **i.** $p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc $\boxed{p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}}$.

ii. $3 - 3p + p^2 = \frac{3}{4} + \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant \frac{3}{4}$ donc $\frac{1}{3-3p+p^2} \leqslant \frac{4}{3}$.

On a alors $\frac{p(1-p)}{3-3p+p^2} \leqslant \frac{1}{3}$. On a bien $\boxed{P(\Delta = 0) \leqslant \frac{1}{3}}$.

c. Comme $P(\Delta = 0) = \frac{p(1-p)}{3-3p+p^2}$, on étudie sur $]0,1[$ la fonction f définie par :

$\forall x \in]0,1[, f(x) = \frac{x - x^2}{3-3x+x^2}$.

f est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{(1-2x)(3-3x+x^2) - (x-x^2)(-3+2x)}{(3-3x+x^2)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est donné par le signe du numérateur

$N(x) = (1-2x)(3-3x+x^2) + (x-x^2)(3-2x) = 2x^2 - 6x + 3$.

Le discriminant de $N(x)$ est 12 donc ses deux racines sont $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

$\alpha \in]0,1[$ et $\beta > 1$ d'où le tableau de variations de f sur $]0,1[$:

x	0		α		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

.

On en conclut que $\boxed{P(\Delta = 0) \text{ admet un maximum pour } p = \frac{3-\sqrt{3}}{2}}$

et ce maximum vaut $f(\alpha) = \frac{\alpha - \alpha^2}{3 - 3\alpha + \alpha^2}$.

Comme α est racine de $2x^2 - 6x + 3$, $\alpha^2 = 3\alpha - \frac{3}{2}$ donc $f(\alpha) = \frac{2}{3}\left(-2\alpha + \frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{4}{3}\alpha$.

$\boxed{\text{Le maximum de } P(\Delta = 0) \text{ est égal à } \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \approx 0,155}$.