
Planche 19

Question de cours.

Énoncer le théorème central limite.

Exercice.

Soit $p \in]0, 1[$ et A, B deux variables aléatoires discrètes telles que pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$P(A = i, B = j) = p^2(1 - p)^{i+j-2} \quad (*)$$

1. (a) Vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} P(A = i, B = j) = 1.$$

(b) Montrer que A suit la loi géométrique de paramètre p .

(c) Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire A .

En déduire une valeur approchée de la probabilité de l'événement « A est pair ».

(d) Calculer la probabilité de l'événement « A est pair ».

2. On considère l'équation différentielle stochastique $(E) : y'' + Ay' + B^2y = 0$.

(a) Trouver l'équation caractéristique de (E) et calculer le discriminant Δ .

(b) Montrer que les solutions de (E) sont presque sûrement bornées sur \mathbb{R}_+ .

3. (a) Calculer $P(\Delta = 0)$.

(b) i. Justifier que $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$.

ii. Montrer alors que $P(\Delta = 0) \leq \frac{1}{4}$.

On pourra factoriser le dénominateur en pensant à la forme canonique.

(c) Montrer que $P(\Delta = 0)$ admet un maximum et le déterminer.