

---

## Planche 19

---

### Question de cours.

Énoncer le théorème central limite.

---

### Exercice.

Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $A, B$  deux variables aléatoires discrètes telles que pour tout  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$P(A = i, B = j) = p^2(1 - p)^{i+j-2} \quad (*)$$

1. (a) Vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} P(A = i, B = j) = 1.$$

(b) Montrer que  $A$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

(c) Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire  $A$ .

En déduire une valeur approchée de la probabilité de l'événement «  $A$  est pair ».

(d) Calculer la probabilité de l'événement «  $A$  est pair ».

2. On considère l'équation différentielle stochastique  $(E) : y'' + Ay' + B^2y = 0$ .

(a) Trouver l'équation caractéristique de  $(E)$  et calculer le discriminant  $\Delta$ .

(b) Montrer que les solutions de  $(E)$  sont presque sûrement bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. (a) Calculer  $P(\Delta = 0)$ .

(b) i. Justifier que  $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ .

ii. Montrer alors que  $P(\Delta = 0) \leq \frac{1}{4}$ .

*On pourra factoriser le dénominateur en pensant à la forme canonique.*

(c) Montrer que  $P(\Delta = 0)$  admet un maximum et le déterminer.