1. a. D'après la définition des polynômes L_1, L_2 et L_3, $\boxed{\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ L_i(a_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$.

b. Soit $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3\}$.
Montrons que $\mathcal{L}$ est libre : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
$\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha L_1(x) + \beta L_2(x) + \gamma L_3(x) = 0$
En particulier, en choisissant $x = a_1$, $x = a_2$ puis $x = a_3$, on obtient d'après **1.**, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
On a montré $\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$: $\mathcal{L}$ est libre.
Comme $card(\mathcal{L}) = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, étant libre, $\boxed{\mathcal{L} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.

c. Comme $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme 1 se décompose de manière unique dans cette base.
Autrement dit : $\exists!(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 1$.
En évaluant en a_1, a_2 puis a_3, on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 1$.
Conclusion : $\boxed{L_1 + L_2 + L_3 = 1}$.

2. a. Soit $H = \sum_{i=1}^{3} h_i L_i$ alors $H \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall j \in \{1,2,3\},\ H(a_j) = \sum_{i=1}^{3} h_i L_i(a_j) = h_j$ d'après **1**.
Montrons que H est unique : soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall j \in \{1,2,3\},\ P(a_j) = h_j$.
Alors le polynôme $H - P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall j \in \{1,2,3\},\ (H-P)(a_j) = 0$.
Ainsi, $H - P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui admet trois racines distinctes, donc $H - P = 0$ soit $H = P$.
Conclusion : $\boxed{H = \sum_{i=1}^{3} h_i L_i \text{ est l'unique polynôme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } \forall j \in \{1,2,3\},\ P(a_j) = h_j}$.

b. On pose $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 3$.
On définit les trois fonctions polynômes L_1, L_2 et L_3 correspondantes.
Pour quelques fonctions h (sin, exp...), on définit la fonction polynôme H et on vérifie que $\forall j \in \{1,2,3\},\ H(a_j) = h(a_j)$:

```python
a1, a2, a3 = -1, 1, 3
def L1(x):
    return (x-a2)*(x-a3)/((a1-a2)*(a1-a3))
def L2(x):
    return (x-a1)*(x-a3)/((a2-a1)*(a2-a3))
def L3(x):
    return (x-a1)*(x-a2)/((a3-a1)*(a3-a2))

import math as m
def h(x):
    return m.sin(x)
def H(x):
    return h(a1)*L1(x)+h(a2)*L2(x)+h(a3)*L3(x)
for x in [a1,a2,a3]:
    print(h(x) == H(x))
```

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ est valeur propre de f alors $\exists x \in E \mid x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$.
On a alors $R(f)(x) = (f - a_1 id) \circ (f - a_2 id) \circ (f - a_3 id)(x) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)x$.
Comme $R(f) = 0$ et $x \neq 0$, on a $(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3) = 0$.
On conclut que $\boxed{\text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } f \text{ alors } R(\lambda) = 0 \text{ donc } \lambda \in \{a_1, a_2, a_3\}}$.

4. a. Comme a_1, a_2 et a_3 sont trois valeurs propres distinctes de f
$\boxed{\text{la juxtaposition des bases } \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ et } \mathcal{B}_3 \text{ des sous-espaces propres associés est une partie libre de } E}$

b. Par définition des polynômes R et L_1, on a $\boxed{R = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(X - a_1)L_1}$.

c. Comme $R(f) = 0$ et $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \neq 0$, on a $(f - a_1 id) \circ L_1(f) = 0$.
On en déduit que : $\forall x \in E,\ f(L_1(f)(x)) = a_1 L_1(f)(x)$.
On a bien : $\boxed{\forall x \in E,\ L_1(f)(x) \in E_1}$.

d. D'après **1c.**, $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ donc $L_1(f) + L_2(f) + L_3(f) = id$.
On en déduit que : $\forall x \in E,\ L_1(f)(x) + L_2(f)(x) + L_3(f)(x) = x$.
De la même manière que ci-dessus, on pourrait montrer que :
$\forall x \in E,\ L_2(f)(x) \in E_2$ et $L_3(f)(x) \in E_3$.
On sait alors que $L_1(f)(x)$ se décompose dans la base $\mathcal{B}_1$,
$L_2(f)(x)$ se décompose dans la base $\mathcal{B}_2$
et $L_3(f)(x)$ se décompose dans la base $\mathcal{B}_3$.
On en conclut que tout vecteur x de E se décompose dans la famille constituée de la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$: $\boxed{\text{la juxtaposition des bases } \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ et } \mathcal{B}_3 \text{ est une famille génératrice de } E}$.

e. D'après **a.** et **d.**, la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ est une famille libre et génératrice de E : c'est une base de E.
On en déduit qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f :
$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.