Retour Oral 32 - Chato 2023

Soit a_1, a_2, a_3 trois réels tels que $a_1 < a_2 < a_3$. On considère les trois polynômes suivants vus comme éléments de $\mathbf{R}_2[X]$:

$$L_1 = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \quad L_2 = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}, \quad L_3 = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

1. (a) Donner la valeur de $L_i(a_j)$ pour $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$.
   (b) Montrer que $\mathscr{L} = (L_i)_{1 \leq i \leq 3}$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
   (c) Vérifier que $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.
2. Soit h une fonction définie sur $\mathbf{R}$, et notons, pour $i \in \{1,2,3\}$, $h_i = h(a_i)$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} h_i L_i$ est l'unique polynôme H de $\mathbf{R}_2[X]$ vérifiant la propriété :
   $$(\star) \qquad \forall i \in \{1,2,3\} \quad H(a_i) = h_i.$$
   (b) dans le cas particulier où l'on a $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 1, 3)$,vérifier sous python, que H satisfait la propriété $(\star)$ avec différents choix de la fonction h.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E.

Pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, mettons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k X^k$, on définit un endomorphisme de E, noté $P(f)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k f^k, \quad \text{où} \quad f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\text{facteurs}}, \quad \text{et} \quad f^0 = \mathrm{Id}_E.$$

Enfin, on suppose que :

$$(f - a_1\mathrm{Id}_E) \circ (f - a_2\mathrm{Id}_E) \circ (f - a_3\mathrm{Id}_E) = 0,$$

c'est-à-dire : $R(f) = 0$, où $R = (X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)$.

3. Soit λ une valeur propre de f. Montrer que $R(\lambda) = 0$, et en déduire les valeurs propres possibles de f.
4. Dans cette question, on suppose que le spectre de f est $\{a_1, a_2, a_3\}$. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre a_i et $\mathscr{B}_i$ une base de E_i.
   (a) Que peut-on dire de la juxtaposition des bases $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$?
   (b) Dans la suite, l'endomorphisme $L_i(f)$ sera noté Π_i pour $i \in \{1,2,3\}$. Expliciter la factorisation de R par L_i.
   (c) En déduire que pour tout vecteur x de E, $\Pi_1(x) \in E_1$.
   (d) En utilisant 1. (c) montrer que la juxtaposition des bases $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ est une famille génératrice de E.
   (e) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?