Nombres complexes - Trigonométrie

I Nombres complexes

1. Représentations d'un nombre complexe

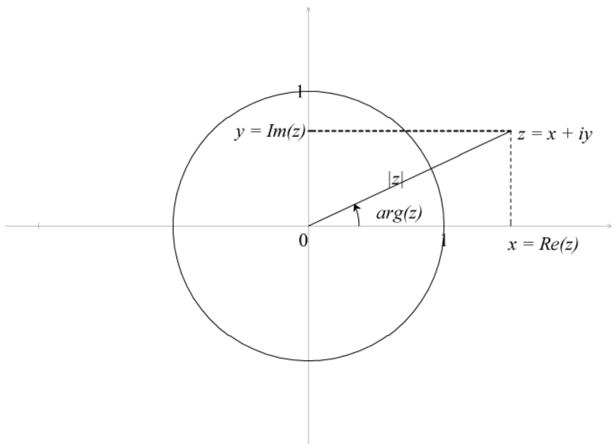
Définition 1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$,

- à chaque point $M(x,y)$, on associe son affixe $z = x + iy$
- à chaque nombre complexe $z = x + iy$, on associe son point image $M(x,y)$
- $x = \mathcal{R}e(z)$ est la partie réelle et $y = \mathcal{I}m(z)$ est la partie imaginaire de z
- l'angle $\widehat{\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)}$ est l'argument de z (si $z \neq 0$). On note $\widehat{\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)} = \arg z \ (2\pi)$
- le nombre complexe nul n'admet pas d'argument
- la norme de $\overrightarrow{OM}$ est le module de z. On note $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |z|$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Notations L'écriture du nombre complexe $z = x + iy$ est la forme algébrique de z.
L'écriture du nombre complexe $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg z \ (2\pi)$ est la forme exponentielle de z

.



Proposition 1 • $\forall z \in \mathbb{C}, z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
• $\forall z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = 0 \ (\pi)$
• $\forall z \in \mathbb{C}, z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$.

Proposition 2 Soit $z = x + iy = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul
où $x = \mathcal{R}e(z)$, $y = \mathcal{I}m(z)$ et $r = |z|$, $\theta = \arg z$.

Alors $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$

En particulier : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

Proposition 3 Soit z et z' deux nombres complexes.
• si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors $z = z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$
• si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors $z = z' \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta'(2\pi)$.

Remarque Soit z un nombre complexe, z est de module égal à 1 si, et seulement si : $\exists\theta \in \mathbb{R} \ | z = e^{i\theta}$

Proposition 4 Formule d'Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Définition 2 Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ et de formes exponentielles $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.

Alors $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.

et si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

Proposition 5 Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

$|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = (\arg z) + (\arg z')\ (2\pi)$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg(\dfrac{z}{z'}) = (\arg z) - (\arg z')\ (2\pi)$

Proposition 6 Formule du binôme de Newton :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

Proposition 7 Formule de Moivre :

Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ de formes exponentielles : $\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ z_k = r_k e^{i\theta_k}$.

Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right) e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k}$. En particulier : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Définition 3 Soit $z = x + iy = re^{i\theta}$ un nombre complexe.

Le nombre complexe conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$.

Proposition 8 •$\forall z \in \mathbb{C},\ z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$

•$\forall z \in \mathbb{C},\ z\bar{z} = |z|^2$. On en déduit que, si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ et si $|z| = 1$ alors $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$

•$\forall z \in \mathbb{C},\ |\bar{z}| = |z|$ et $\arg\bar{z} = -\arg z\ (2\pi)$.

•$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'},\ \overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$ et si z' est non nul, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.

Proposition 9 $\forall z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Définition 4 Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$.

On appelle exponentielle de z, le nombre complexe non nul, noté e^z, défini par :

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Proposition 10 $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, z = i2k\pi$

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, z' = z + i2k\pi$

Remarque On prolonge ainsi la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$ alors $|e^z| = e^{\mathcal{R}ez}$ et $\arg(e^z) = \mathcal{I}mz\ (2\pi)$

3. Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

Définition 5 Les racines carrées du complexe z sont les deux complexes $\pm\omega$ tels que $\omega^2 = z$.

Proposition 11 Soit $z \in \mathbb{C}$.

• Si $z = re^{i\theta}$ alors les deux racines carrées de z sont $\pm\rho e^{i\alpha}$ où $\rho = \sqrt{r}$ et $\alpha = \dfrac{\theta}{2}(\pi)$

• Si $z = a + ib$ alors les deux racines carrées de z sont $\pm(x + iy)$

où x et y vérifient le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$.

Définition 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racine n-ième de l'unité les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Remarque • les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres : $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

• en notant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, les racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et j^2. On a $\bar{j} = j^2, j^2 + j + 1 = 0$

Proposition 12 Soit l'équation (E) $az^2 + bz + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.

La forme canonique du trinôme est :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \text{ où } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Soit δ l'une des deux racines carrées de Δ, alors les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Les relations coefficients-racines du trinôme sont :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions réelles distinctes $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une unique solution réelle $z = \dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux solutions conjuguées $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

4. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit φ une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Les définitions et propriétés s'étendent facilement à ce cas en posant $f(x) = \mathcal{Re}(\varphi(x))$ et $g(x) = \mathcal{Im}(\varphi(x))$

• $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + i \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

• Si f et g sont dérivables en a alors $\varphi'(x) = f'(x) + ig'(x)$

• Si f et g admettent des primitives F et G sur un intervalle I alors φ admet une primitive Φ définie par $\Phi(x) = F(x) + iG(x)$

• On pose alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)dx + i\int_a^b g(x)\,dx$.

II Trigonométrie

1. Trigonométrie réciproque

Définition 7 • la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1,1]$ dont la fonction réciproque est la fonction arcsinus définie de $[-1,1]$ vers $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par :

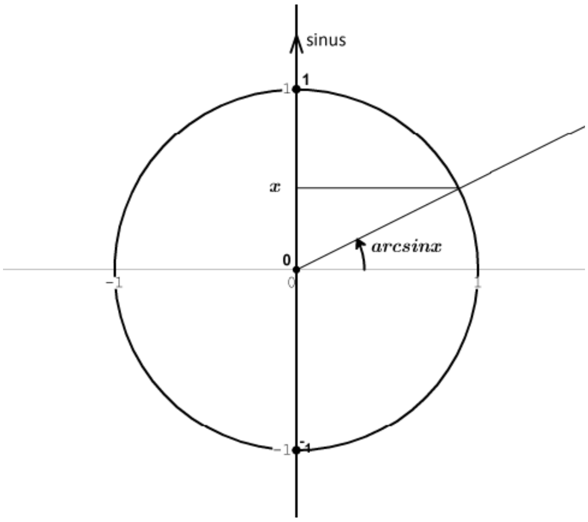
$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

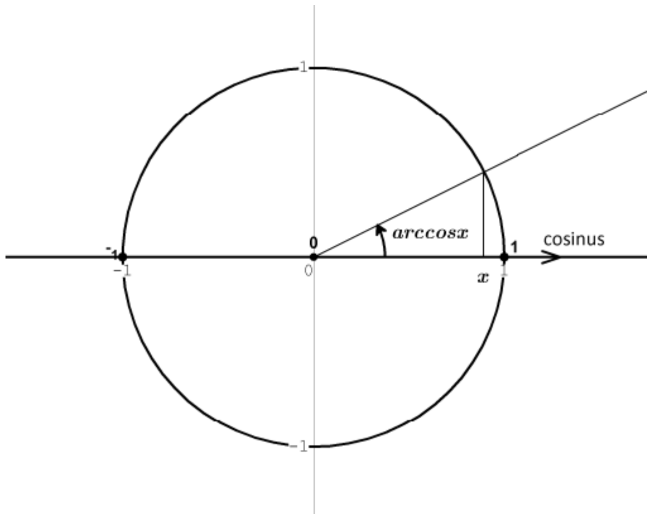
Autrement dit, $\arcsin x$ est l'unique angle de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x.

• la fonction cosinus réalise une bijection de $[0;\pi]$ vers $[-1,1]$ dont la fonction réciproque est la fonction arccosinus définie de $[-1,1]$ vers $[0;\pi]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in [0;\pi], y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

Autrement dit, $\arccos x$ est l'unique angle de $[0;\pi]$ dont le cosinus vaut x.

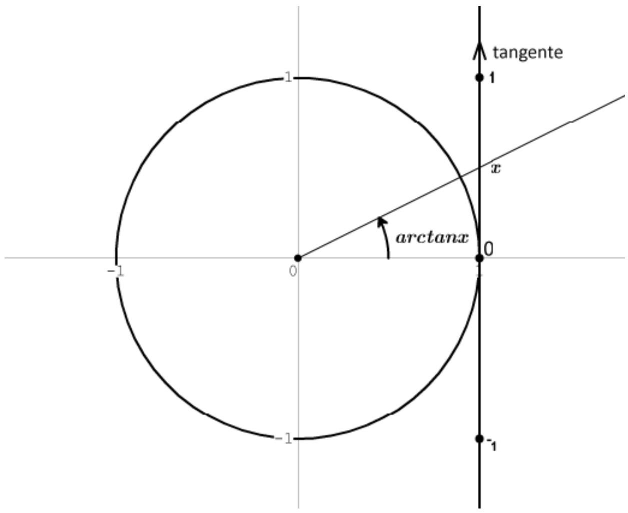




• la fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ dont la fonction réciproque est la fonction arctangente définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

Autrement dit, $\arctan x$ est l'unique angle de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x.



2. Transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$ où a, b et θ sont réels

On suppose $(a,b) \neq 0$ et on écrit :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right)$$

Si on peut, on cherche alors un angle usuel φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Sinon, on pose $\varphi = \arctan\dfrac{b}{a}$

On a alors $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) = r\cos(\theta-\varphi)$ avec $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

3. Linéarisation d'expression de la forme $\cos^m\theta\sin^n\theta$

Tout produit de la forme $\cos^m\theta\sin^n\theta$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$

En effet : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \cos^m\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^m$ et $\sin^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$

Donc $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \cos^m\theta = \dfrac{1}{2^m}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^m$ et $\sin^n\theta = \dfrac{1}{(2i)^n}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^n$.

On développe $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^m$ et $(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^n$ à l'aide de la formule du binôme puis leur produit.

Enfin, on regroupe les termes $e^{ik\theta} \pm e^{-ik\theta}$ pour retrouver $2\cos(k\theta)$ ou $2i\sin(k\theta)$

4. Transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

On utilise la formule de Moivre : $\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i\sin x)^n$.
On développe $(\cos x + i\sin x)^n$ à l'aide de la formule du binôme
puis on identifie les parties réelles $(\cos(nx))$ et imaginaires $(\sin(nx))$.

5. Formules trigonométriques

à connaître par coeur :

- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

à savoir retrouver rapidement :

- $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ et $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Exercice 1 Donner module et argument du nombre complexe : $z = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 1) Déterminer les formes algébrique et exponentielle de $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$.

2) Soit $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
Calculer z^2, en déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 3 1) z et z' sont deux complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.
Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

2) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.
Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = e^{i\theta} + 1$ et $z_2 = e^{i\theta} - 1$.

Exercice 4 Déterminer les racines carrées de $z_1 = 1+i$, $z_2 = 45 - 25i$ et $z_3 = \dfrac{1+i}{1-i}$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^3 = 1$ et $z^7 - 1 = 0$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $z^2 + z + 1 = 0$
2) $z^3 = -(2+i)^3$
3) $1 + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 = 0$. On pourra poser $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Exercice 7 Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = e^{zx}$ où $z \in \mathbb{C}$.
Déterminer $\varphi'(x)$.

Exercice 8 Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :
1) $2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ dans $\mathbb{R}$
2) $\sin x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$.

Exercice 10 Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :
1) $\cos^4 x$
2) $\cos x \sin^3 x$

Exercice 11 Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.
En utilisant le fait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
On pose $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.
Calculer $A_n(x) + iB_n(x)$.
En déduire $A_n(x)$ et $B_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.