Fonctions réelles d'une variable réelle

I Notions fondamentales

1. Intervalles et valeur absolue

Définition 1 La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Proposition 1 •$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| - |y| \leqslant ||x| - |y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

•$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x||y|$.

•$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall r > 0,\ |x-a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$

•$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall r \geqslant 0,\ |x-a| \leqslant r \Leftrightarrow a - r \leqslant x \leqslant a + r$

2. Majorants et minorants

Définition 2 Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

• Un réel M est un majorant de A si, et seulement si : $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.

On dit que A est majorée si, et seulement si, A admet au moins un majorant.

• Un réel m est un minorant de A si, et seulement si : $\forall x \in A,\ m \leqslant x$.

On dit que A est minorée si, et seulement si, A admet au moins un minorant.

• A est bornée si, et seulement si, A est à la fois majorée et minorée.

3. Borne inférieure et borne supérieure

Définition 3 Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

• La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.

Si elle existe, la borne supérieure de A est unique et on la note $\sup A$

• La borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A.

Si elle existe, la borne inférieure de A est unique et on la note $\inf A$

Proposition 2 Théorème de la borne supérieure :

Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors A possède une borne supérieure.

Si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ alors A possède une borne inférieure.

II Composition, injection, surjection et bijection

1. Composition

Définition 4 Soit f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur D_f et D_g telles que $\forall x \in D_f$, $f(x) \in D_g$ alors la fonction composée de g par f est définie par : $\forall x \in D_f,\ g \circ f(x) = g(f(x))$.

2. Injection, surjection, bijection

Définition 5 Soi f une fonction numérique définie sur D_f, I une partie de D_f et J une partie de $\mathbb{R}$.

• f est une injection ou une fonction injective si, et seulement si :

$\forall (x,x') \in D_f^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

ce qui est équivalent à $\forall (x,x') \in D_f^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

• f est une surjection ou une fonction surjective de I vers J si, et seulement si :

$\forall y \in J,\ \exists x \in I \,/\, f(x) = y$ ce qui est équivalent à : $f(I) = J$.

• f est une bijection ou une fonction bijective de I vers J si, et seulement si :

f est à la fois injective et surjective ce qui est équivalent à : $\forall y \in J,\ \exists! x \in I \,/\, f(x) = y$.

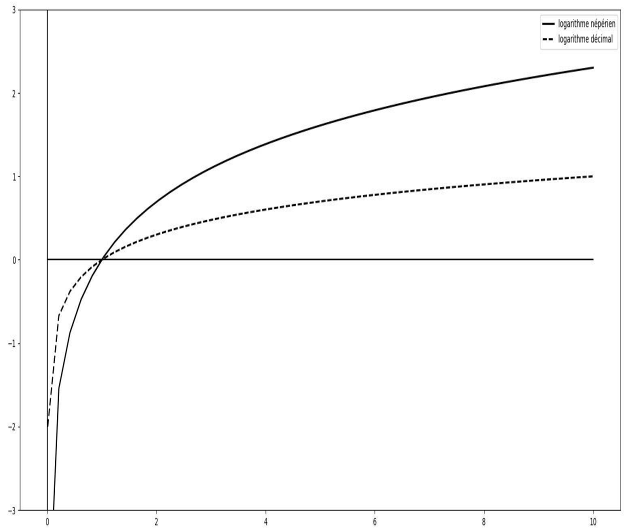
Définition 6 Soit f une fonction bijective de I vers J.
La bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est la fonction qui à tout y de J associe l'unique x de I tel que $f(x) = y$. Ainsi : $\forall x \in I,\ \forall y \in J,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Proposition 3 Soit f une fonction définie sur I et J une partie de $\mathbb{R}$.
f est bijective de I vers J si, et seulement s'il existe une fonction g de J dans I telle que :
$\forall x \in I,\ g \circ f(x) = x$ et $\forall y \in J,\ f \circ g(y) = y$. Dans ce cas, $f^{-1} = g$.
En pratique, pour montrer que f est bijective de I vers J et trouver f^{-1}, on résout l'équation $f(x) = y$ pour tous $x \in I$ et $y \in J$.
On obtient au final $f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$ alors f est bijective de I vers J et $f^{-1} = g$.

III Fonctions usuelles

1. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes

Définition 7 •La fonction logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
Elle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Sa réciproque est la fonction exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}$,
$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.
•La fonction logarithme décimale est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Elle est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ et sa réciproque est la fonction exponentielle de base 10 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$.

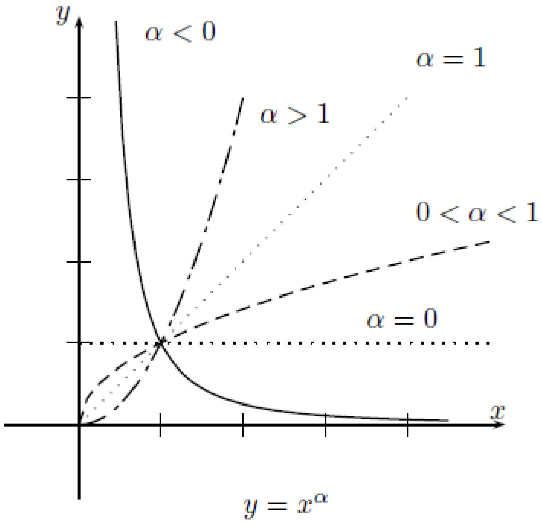


Proposition 4 $\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$
$\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x e^y$
$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
$\bullet \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

2. Fonctions puissances

Définition 8 On appelle fonction de puissance α la fonction qui à x associe x^α.
• Si $\alpha = 0$ alors $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

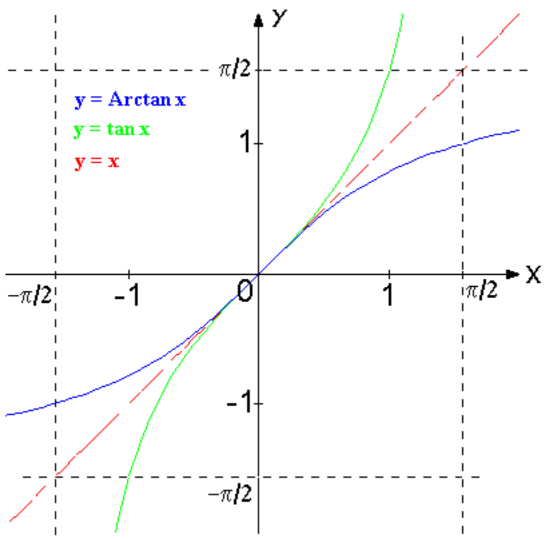
• Si $\alpha \in \mathbf{N}^*$ alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}$.
• Si $\alpha \in \mathbf{Z}_-^*$ alors en posant $p = -\alpha$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = \dfrac{1}{x^p}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
• Dans les autres cas, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$



Définition 9 Si $n > 0$, la <u>fonction racine n-ième</u> est la fonction réciproque de la fonction puissance n.
Autrement dit : $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair et sur $\mathbb{R}$ si n est impair.
Sur $\mathbb{R}_+^*$, elle coïncide avec la fonction puissance $\dfrac{1}{n}$.

3. La fonction arctangente

Définition 10 La fonction tangente est continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.
L'application réciproque de cette bijection est appelée <u>fonction arctangente</u>.
Elle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et notée arctan.
arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\ y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$
Autrement dit, $\arctan x$ est l'unique angle de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x.



Proposition 5 La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

Preuve $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x$ donc $\arctan' x(1+\tan^2(\arctan x)) = 1$. Comme $1+\tan^2(\arctan x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$.

IV Limites et comparaison des fonctions

1. Notion de voisinage

Définition 11 On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée au voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ si elle est vérifiée sur un intervalle ouvert contenant x_0.

2. Limite en un point

Définition 12 Soit une fonction numérique f définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a et $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in D_f\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\right]$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left[\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in D_f\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)\right]$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left[\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in D_f\ (|x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A)\right]$

Proposition 6 En général, la limite d'une somme (resp. produit, quotient) de deux fonctions est égale à la somme (resp. produit, quotient) des limites de ces deux fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Remarque Il y a sept cas de formes indéterminées : $+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ \infty^0,\ 0^0$.

Pour $1^{\infty},\ \infty^0$ et 0^0 on écrit toujours $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Proposition 7 •Le passage à la limite conserve les inégalités larges :

– s'il existe un voisinage de a sur lequel $m \leqslant f \leqslant M$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $m \leqslant \ell \leqslant M$

– s'il existe un voisinage de a sur lequel $f \leqslant g$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leqslant \ell'$.

• si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $m < \ell < M$ alors il existe un voisinage de a sur lequel $m < f < M$

3. Fonctions équivalentes

Définition 13 Soit f et g deux fonctions définies sur D et α un réel de $\overline{D}$ ($= D \cup \{$les bornes de $D\}$) tel que g ne s'annule pas au voisinage de α sauf, éventuellement en α.

f est équivalente à g au voisinage de α si, et seulement si : $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f \underset{\alpha}{\sim} g$

Proposition 8 Soit f, g et h trois fonctions numériques définies sur D et x_0 un réel de $\overline{D}$.

• $f \underset{\alpha}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{\alpha}{\sim} f$

• $f \underset{\alpha}{\sim} g$ et $g \underset{\alpha}{\sim} h \Rightarrow f \underset{\alpha}{\sim} h$

• $f \underset{\alpha}{\sim} g \Rightarrow fh \underset{\alpha}{\sim} gh$

• si r est un réel $f \underset{\alpha}{\sim} g \Rightarrow f^r \underset{\alpha}{\sim} g^r$

• si u est une fonction telle que $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = \alpha$ alors $f \underset{\alpha}{\sim} g \Rightarrow f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u$

Proposition 9 Soit f et g deux fonctions numériques définies sur D, α un réel de D et ℓ un réel.

• si $f \underset{\alpha}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$

• $[\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$ et $\ell \neq 0] \Leftrightarrow f \underset{\alpha}{\sim} \ell$

5. Comparaison des fonctions usuelles

Proposition 10 •$\forall a \in \mathbb{R}$ $x^a - 1 \underset{1}{\sim} a(x-1)$ et, en posant $h = x-1$, $(1+h)^a - 1 \underset{0}{\sim} ah$

• si $P(x) = a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0$ alors $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p$

• $\sin x \underset{0}{\sim} x$ $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ $\tan x \underset{0}{\sim} x$

• $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$ ou aussi $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

• $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

•$\forall a > 0$ et $\beta > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln^\beta x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^\beta x}{x^a} = 0$

•$\forall a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0$

V Continuité sur un intervalle

1. Fonction continue

Définition 14 Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et $a \in \mathcal{D}$.

• f est continue en a si, et seulement si, f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

• f est continue à droite (resp à gauche) en a si, et seulement si, f admet une limite réelle quand x tend vers a $x > a$ (resp. $x < a$)

• f est continue sur un intervalle $\mathcal{I}$ si, et seulement si, f est continue en tout point de $\mathcal{I}$.

Proposition 11 • Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

• la somme, le produit par un réel, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues sur $\mathcal{I}$ sont des fonctions continues sur $\mathcal{I}$

• si f est continue sur $\mathcal{I}$ et g est continue sur $f(\mathcal{I})$ alors $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{I}$

Définition 15 Soit $\mathcal{I}$ un intervalle, $a \in \mathcal{I}$. Soit f une définie sur $\mathcal{I}\setminus\{a\}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Le prolongement par continuité de f en a est la fonction g définie sur $\mathcal{I}$ par :

$$\forall x \in \mathcal{I},\ g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{I}\setminus\{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}.$$

2. continuité et bijection

Proposition 12 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I}$ et $(a, b) \in \mathcal{I}^2$.

Pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a, b] \,/\, d = f(c)$

En particulier, si $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors f s'annule au moins une fois entre a et b.

Attention Pas d'unicité et donc pas de bijection avec ce théorème

Conséquences • l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

• l'image d'un segment par une fonction continue est un segment (f atteint ses bornes)

Proposition 13 Théorème de la la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $\mathcal{I}$.

Alors f définit une bijection de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$.

VI Dérivabilité et fonctions dérivées

1. Définition

Définition 16 Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ et a un réel de $\mathcal{I}$.

• f est dérivable en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie et dans ce cas $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

• f est dérivable en a $\Leftrightarrow f$ admet un $DL_1(a)$

$\Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \circ(x-a)$ et dans ce cas, $f'(a) = \ell$

Proposition 14 Toute fonction dérivable en a est continue en a mais la réciproque est fausse.

Remarque La tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a admet pour équation

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ (de coefficient directeur $f'(a)$)

Définition 17 Une fonction f est dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$ si, et seulement si, elle est dérivable en tout point de $\mathcal{I}$. On peut alors définir la fonction dérivée de f sur $\mathcal{I}$ notée f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Proposition 15 • Si f et g sont dérivables sur $\mathcal{I}$ alors $f+g$, λf et fg sont dérivables sur $\mathcal{I}$.

si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{I}$ alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathcal{I}$.

• Si f est dérivable sur $\mathcal{I}$ et g est dérivable sur $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$ alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{I}$.
De plus : $\forall x \in I,\ (g\circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

• Si f est bijective de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{J}$, dérivable sur $\mathcal{I}$ et telle que f' ne s'annule pas sur $\mathcal{I}$ alors f^{-1} est dérivable sur $\mathcal{J}$. De plus : $\forall y \in \mathcal{J},\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

2. Dérivées usuelles

fonction usuelle	dérivée
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
x^r , $r \in \mathbb{R}$	rx^{r-1}
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x

fonction usuelle	dérivée
a^x , $a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

3. Dérivée n-ième et classe de fonction

Définition 18 Soit f une fonction définie sur I. On définit par récurrence la n-ième fonction dérivée (ou dérivée d'ordre n) de f notée $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$: $f^{(0)} = f$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)} = f^{(k)\prime}$

Proposition 16 • Soit $f(x) = x^p$. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p(p-1)\cdots(p-n+1)x^{p-n} = \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}.$$

• Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Proposition 17 Si f et g sont n fois dérivables sur $\mathcal{I}$ alors $f+g$ aussi et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

Définition 19 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{I}$.

$\bullet f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \Leftrightarrow f$ est n fois dérivable sur $\mathcal{I}$ et $f^{(n)}$ est continue sur $\mathcal{I}$

$\bullet f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}) \Leftrightarrow f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{I}$.

Proposition 18 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{I}$, n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

Alors $f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \Leftrightarrow f^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(\mathcal{I})$

Proposition 19 $\bullet (f, g) \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})^2 \Rightarrow f + g \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$ et $fg \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$.

$\bullet f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$ et $g \in \mathcal{C}^n(f(\mathcal{I})) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$

4. Propriétés des fonctions dérivables

Proposition 20 Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ et dérivable en un point a de $\mathcal{I}$.

Si f admet en a un extremum local alors $f'(a) = 0$.

Proposition 21 Théorème de Rolle

Soit a et b réels tels que $a < b$, f une fonction continue $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$.

Proposition 22 Théorème des accroissements finis

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, f fonction continue sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) et dérivable sur $]a, b[$ (ou $]b, a[$)

alors $\exists c \in]a, b[\, / \, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Remarque En posant $a = 0$ et $b = x$, soit f est une fonction continue et dérivable entre 0 et x.

si $x > 0$ alors $\exists c \in]0, x[$ et si $x < 0$ alors $\exists c \in]0, x[$

tel que $f(x) = f(0) + f'(c)x$.

VII Développements limités

1. Définition et premières propriétés

Définition 20 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I ou une borne de I.

Le développement limité de f au voisinage de a, à l'ordre n, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, est

$f(x) = P_n(x - a) + \circ((x - a)^n)$ où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

On écrit toujours P_n dans l'ordre des puissances croissantes de $(x - a)$.

Remarque Si f est paire et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors P_n n'a que des termes de degré pair.

Si f est impaire et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors P_n n'a que des termes de degré impair.

Proposition 23 Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$

Soit u telle que $\lim\limits_{t \to a} u(t) = 0$ et g la fonction définie par : $g(t) = f(u(t))$.

Alors g admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donnée par $g(t) = P_n(u(t)) + \circ((u(t))^n)$.

Proposition 24 Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k x^k + \circ(x^n)$ avec $a_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

Proposition 25 Soit f une fonction qui admet une primitve F au voisinage de 0.

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n)$

alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ donné par $F(x) = F(0) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \circ(x^{n+1})$.

2. Développements limités usuels

Proposition 26 Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et n fois dérivable en 0.

Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ égal à $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \circ(x^n)$.

On en déduit les développements limités usuels au voisinage de 0 :

- $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \circ(x^n)$
- $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \circ(x^{2n+1})$
- $\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2})} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \circ(x^{2n+2})$
- $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \circ(x^n)$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \circ(x^n)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \circ(x^n)$
- $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n + \circ(x^n)}$.

Pour calculer les coefficients de ce DL, on écrit que

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!} = \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} \times \frac{a-2}{3} \times \ldots \times \frac{a-(k-1)}{k}$$

3. Opérations sur les développements limités

Proposition 27 Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$

alors $f + g$, λf et fg admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ donnés par :

- $(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + \circ(x^n)$
- $(\lambda f)(x) = (\lambda P_n(x) + \circ(x^n)$
- $(fg)(x) = R_n(x) + \circ(x^n)$ où $R_n(x)$ est le polynôme obtenu à partir du produit de P_n et Q_n en ne conservant que les termes de degré inférieur ou ègal à n.

Remarque si $f(x) = a_p x^p + \ldots + a_n x^n + \circ(x^n)$ alors $g(x)$ est multiplié au minimum par $a_p x^p$ donc pour avoir un DL_n de fg, il suffit d'avoir un DL_{n-p} de $g(x)$.

Proposition 28 Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n)$ dans ce cas $f(0) = a_0$,

si g admet un $\mathrm{DL}_n(f(0))$: $g(u) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell (u - a_0)^\ell + \circ((u-a_0)^n)$ alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et

$g \circ f(x) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - a_0 \right)^\ell + \circ(x^n)$ (on ne conserve que les termes de degré $\leqslant n$).

Remarque Pour déterminer le DL d'un quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, on pose $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\dfrac{1}{g(x)}$.

Pour le DL de $\dfrac{1}{g(x)}$, on utilise la composée de g et de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$.

4. Utilisations des développements limités

i. Etude locale d'une fonction

• Si f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \circ(x-a)$
alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $A(a, f(a))$ d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$
• La position relative de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente est donnée par le signe du premier terme non nul du DL de $f(x) - (a_0 + a_1(x-a))$.

ii. Étude au voisinage de l'infini d'une fonction

On effectue le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ et on écrit un DL(0) de $g(t) = f(\dfrac{1}{t})$.
Si $g(t) = \dfrac{a}{t} + b + ct^p + \circ(t^p)$ au voisinage de 0 alors $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^p} + \circ(\dfrac{1}{x^p})$ en l'infini.
On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$.
La position relative est donnée par le signe de $\dfrac{c}{x^p}$.

VIII Étude d'une fonction

Quand on doit étudier une fonction f, il est important de le faire avec méthode :

1)Ensemble de définition
2)Remarques sur d'éventuelles symétrie (parité) et restriction de l'ensemble d'étude
3)Ensemble de continuité et de dérivabilité de la fonction f
4)Étude des limites aux bornes du domaine de définition
5)Étude des variations de f et tableau de variations complet
6)Parfois, on demande la tangente en un point (utilisation d'un DL ou classiquement)
7)Parfois, on demande l'étude des branches infinies :
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$
Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on cherche une éventuelle asymptote oblique à l'aide des développements limités
ou en étudiant $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$: -si $a = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique d'axe (Oy)
-si $a = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique d'axe (Ox)
-sinon $a \in \mathbb{R}^*$ et on étudie $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$
si $b = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptotique de pente a
sinon $b \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

8)Allure de la courbe à partir des études précédentes.

IX Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéqautions suivantes :
a) $\left|a-\frac{1}{5}\right| = \frac{5}{6}$ b) $|b-3| > \frac{3}{2}$ c) $\left|c+\frac{3}{4}\right| \leqslant \frac{4}{3}$

Exercice 2 Exprimer les relations suivantes à l'aide d'inégalités et de valeurs absolues :
a) $a \in]-\frac{16}{5}, \frac{14}{5}[$ b) $b \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ c) $c \in [0,4]$

Exercice 3 Donner, s'ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure et la borne inférieure de :
a) $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $B = \left\{\frac{1}{1-2^{-n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 4 Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 5 Soit $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.
Pour $x \in]-1,1[$, on pose : $g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Conclure.

Exercice 6 Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué :
a) $f(x) = 2x^2 - x - 1$ en 0, en 1 et en $+\infty$ b) $f(x) = \sin(1-\cos x)$ en 0

Exercice 7 Étudier les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos 2x}$

Exercice 8 Étudier le domaine de définition et les limites aux bornes des fonctions définies par :
a) $f(x) = x^a e^{1/x}$ $(a \in \mathbb{R})$ b) $f(x) = (1-\ln x)^x$

Exercice 9 On pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. La fonction f est-elle prolongable par continuité sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10 Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

Exercice 11 Soit $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right)$.
Calculer la dérivée de f. En déduire une expression simple de $f(x)$

Exercice 12 Soit $f(x) = \ln(1+x)$. Calculer la dérivée n-ième de f.

Exercice 13 Soit $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ sinon. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 Établir l'encadrement : $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan(\frac{4}{3}) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

Exercice 15 Déterminer les développements limités suivants :
a) $\text{DL}_2(2)$ de $\frac{1}{x}$ b) $\text{DL}_2(1)$ de $\ln(1+\sqrt{x})$ c) $\text{DL}_2(+\infty)$ de $\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$

Exercice 16 En utilisant des développements limités, calculer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x(e^{2x}+1-2e^x)}$