Intégrales sur un segment - Équations différentielles

I Définition et notation de l'intégrale

a. Définition 1 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I,
a et b deux éléments quelconques de I et F une primitive de f sur I.
Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive de f sur I et est appelé l'intégrale de a à b de la fonction f.
On le note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Preuve Soit F et G deux primitives de f sur I, alors $F = G + k$ où k est une constante.
Donc $F(b) - F(a) = G(b) + k - (G(a) + k) = G(b) - G(a)$

Exercice 1 calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_{-2}^{3} x^2 \mathrm{d}x, \qquad J = \int_2^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}, \qquad K = \int_a^b \lambda\, \mathrm{d}x \text{ pour tous réels } a, b \text{ et } \lambda.$$

Remarques • Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la lettre x s'appelle la variable d'intégration.
Elle n'apparaît plus dans le résultat, on la qualifie de variable muette.
On peut alors la remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.
• Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors, pour tout a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

II Interprétation en termes d'aire

a. Définition 2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f sur $[a, b]$ et $\mathcal{D}_f$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
• si f est positive sur $[a, b]$ alors $\mathcal{D}_f = \{M(x, y) \,/\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et l'aire de $\mathcal{D}_f$ est le nombre réel positif $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
• si f est négative sur $[a; b]$, $-f$ est positive sur $[a; b]$ et l'aire de $\mathcal{D}_f$ est le nombre réel positif $\mathcal{A} = \int_a^b (-f)(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
• dans le cas général, l'aire de $\mathcal{D}_f$ est le nombre réel positif $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

Remarque il est souvent utile de traduire l'intégrale en termes d'aires. Par exemple, si f est continue et impaire sur un intervalle $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

III Techniques de calcul d'intégrales sur un segment

1. Lecture inverse des formules de dérivation

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, la méthode la plus simple est, lorsque l'on connait une primitive F de f, de calculer directement $F(b) - F(a)$.
On utilisera la liste des primitives (à une constante près) des fonctions élémentaires :

fonction	primitive
x^r , $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$

fonction	primitive
$u'u^r$, $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'e^u$	e^u
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'(1+\tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$

En particulier :

fonction	primitive
a^x , $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x$
$\dfrac{1}{ax+b}$, $a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$
e^{ax+b} , $a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$
$\sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$

2. Intégration par parties

La formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$ permet d'écrire que si u, v, u', v' sont des fonctions continues sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b (u'v+uv')(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b$

Il en résulte, en utilisant la linéarité de l'intégrale, la formule d'intégration par parties :

Proposition 1 Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées u′ et v′ continues sur $[a;b]$.

Alors $\int_a^b (uv')(x)\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)\mathrm{d}x$

Cette méthode n'est intéressante que si $\int_a^b (uv')(x)\mathrm{d}x$ est plus facile à calculer que $\int_a^b (u'v)(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2 1) Calculer $I = \int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

2)Determiner une relation de récurrence puis calculer les intégrales de Wallis définies par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

3. Changement de variable

La formule générale utilise la dérivation d'une composée :

Soit $\left\{\begin{array}{l} x = u(t) \\ \mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} a = u(\alpha) \\ b = u(\beta) \end{array}\right.$ alors $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta u'(t).f(u(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x,\ J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)\mathrm{d}x,\ K = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{(x^3+3x+1)^3}}\mathrm{d}x.$$

Remarque Seul un changement de variable affine doit être connu, les autres seront donnés.

4. Cas des polynômes trigonométriques

S'il y a une puissance impaire, on effectue un changement de variable sinon, on linéarise :

Exercice 4 calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x \mathrm{d}x$

Remarque on peut utiliser l'intégrale de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x e^{-2x} dx = \mathcal{I}m\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x e^{(-2+i)x} dx\right)$.

5. Cas des fonctions de la forme $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$ avec $p^2-4q \neq 0$

On cherche λ tel que $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q} = \dfrac{a}{2}\dfrac{2x+p}{x^2+px+q} + \dfrac{\lambda}{x^2+px+q}$

Pour $\displaystyle\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx$, on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Pour $\displaystyle\int \frac{\lambda}{x^2+px+q} \mathrm{d}x$,

•Si $p^2-4q > 0$ alors $x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$. On décompose alors $\dfrac{\lambda}{x^2+px+q} = \dfrac{\alpha}{x-x_1} + \dfrac{\beta}{x-x_2}$.

•Si $p^2-4q < 0$ alors la forme canonique du trinôme donne $\dfrac{\lambda}{x^2+px+q} = \dfrac{\lambda}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + c^2}$

Exercice 6 calculer $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x}$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$.

IV Équations différentielles linéaires du premier ordre

1. Généralités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_n(I)$ l'ensemble des fonctions numériques n fois dérivables sur I.
Soit $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et b, $n+2$ fonctions définies et continues de I sur $\mathbb{R}$.

Définition 3 On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n une relation (E) de la forme :
$(E) : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$.
On appelle solution de (E) sur I toute fonction f de $\mathcal{D}_n(I)$ telle que :
$\forall x \in I, a_n(x)f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = b(x)$
On appelle courbe intégrale de (E) toute courbe représentative d'une solution de (E)
Si la fonction b est la fonction nulle on dit alors que l'équation (E) est homogène
On appelle équation homogène associée à (E) l'équation
$(H) : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Proposition 2 On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre n sur $\mathcal{D}_n(I)$
$(E) : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$.
On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (H).
Si y_p est une solution particulière de (E), alors $\mathcal{S}_E = \{y_p + y_H \mid y_H \in \mathcal{S}_H\}$.

Remarques • Pour résoudre des équations différentielles, il est parfois utile de considérer que les fonctions sont définies de I dans $\mathbb{C}$.

• Principe de superposition :

Si y_1 est solution d'une équation $(E_1)\ :\ a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_1(x)$
et y_2 est solution d'une équation $(E_2)\ :\ a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_2(x)$
alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation
$(E)\ :\ a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas des équations différentielles linéaires du 1er ordre c'est-à-dire des équations de la forme $a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$
La première étape consiste à l'écrire sous forme normalisée : $y' + a(t)y = f(t)$
en divisant par $a_1(t)$ sur tout intervalle J sur lequel a_1 ne s'annule pas.

2. Cas des équations homogènes de la forme $y' + a(t)y = 0$

Proposition 3 Soit (H) l'équation homogène : $y' + a(t)y = 0$.
Soit $a \in \mathcal{C}^0(I)$ et A une primitive de a sur I, $A(t) = \int^t a(x)\,\mathrm{d}x$.
L'ensemble des solutions de (H) est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto Ce^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Preuve •Si $y = Ce^{-A(t)}$ alors y est dérivable sur I et $y' + a(t)y = -CA'(t)e^{-A(t)} + a(t)Ce^{-A(t)} = 0$.
•Réciproquement, $y' + a(t)y = 0 \Leftrightarrow [y' + a(t)y]e^{A(t)} = 0$ car $e^{A(t)} \neq 0$
Or $x \to [y' + a(t)y]e^{A(t)}$ est la dérivée de $t \to ye^{A(t)}$.
On déduit que si y est solution de $y' + a(t)y = 0$ alors $ye^{A(t)} = C$ où $C \in \mathbb{R}$ soit $y = Ce^{-A(t)}$.

Exercice 7 (1) $y' + ty = 0$ (2) $y' + (\cos t)y = 0$ (3) $y' = y\ln t$ (4) $(1 + t^2)y' = y\arctan t$

3. Cas des équations complètes de la forme $y' + a(t)y = f(t)$

On cherche maintenant une solution particulière y_p de l'équation complète $(E)\ :\ y' + a(t)y = f(t)$
Soit on a une solution particulière évidente $y_p(t)$,
soit on utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une fonction C telle que $y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$ soit solution de (E).

Proposition 4 Soit a et f deux fonctions continues sur un intervalle I.
On pose $A(t) = \int^t a(x)\,\mathrm{d}x$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire (E) $y' + a(t)y = f(t)$ est
$\mathcal{S}_E = \{y : t \mapsto y_p(t) + Ce^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{R}\}$ où y_p est une solution particulière de (E).

Preuve Comme dans le **a.**, $[y' + a(t)y = f(t)] \Leftrightarrow [y' + a(t)y]e^{A(t)} = f(t)e^{A(t)}$.
Or $t \mapsto [y' + a(t)y]e^{A(t)}$ est la dérivée de $t \mapsto ye^{A(t)}$ et en posant $C(t) = \int^t f(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x$
on obtient $ye^{A(t)} = C(t) + C$ où $C \in \mathbb{R}$, soit $y = C(t)e^{-A(t)} + Ce^{-A(t)}$.

Exercice 8 (1) $y' = ty - t$ (2) $y' + \dfrac{2t}{1+t^2}y = \dfrac{1+3t^2}{1+t^2}$.

Remarque Si on fixe la condition initiale : $y(t_o) = y_0$ alors l'équation (E) admet une unique solution.
En effet, la condition initiale détermine la constante C.

Remarque hors programme dans le cas général d'une équation $a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ où a_1, a_0 et b sont définies et continues sur un intervalle I.
On détermine l'ensemble J sur lequel $a_1(t)$ ne s'annule pas : $J = \{t \in I \mid a_1(t) \neq 0\}$.
On écrit l'équation sous forme normale : $y\prime + a(t)y = f(t)$ sur J.
On résout l'équation différentielle avec une constante différente pour chaque intervalle qui constitue J et on regarde si on peut prolonger les solutions trouvées en imposant la continuité et la dérivabilité des solutions en les points exclus.

Exercice 9 (1) $ty' = y$ (2) $t^3y' = y$

Remarque hors programme Cas d''une équation différentielle à coefficient constant de la forme
$y' + ay = P(t)e^{rt}$
où $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
La solution générale de l'équation homogène $y' + ay = 0$ est $y = Ce^{-\alpha t}$ où $C \in \mathbb{R}$.
Il y a une solution particulière de la forme :
$y_p(t) = Q(t)e^{rt}$ si $r \neq -a$ et $y_p(t) = tQ(t)e^{rt}$ si $r = -a$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg Q = \deg P$.

Exercice 10 $y' - y = e^t \cos t$

V Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Il s'agit d'équations différentielles de la forme $ay'' + by' + cy = d(t)$
où d est une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c sont trois nombres réels.

1. Cas des équations homogènes de la forme $ay'' + by' + cy = 0$

Proposition 5 Soit a, b et c trois réels et (H) l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$.
On appelle équation caractéristique de (H), l'équation $(\mathcal{C})$, $ax^2 + bx + c = 0$.
•Si $\Delta > 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet deux racines réelles distintes r_1 et r_2.
L'ensemble des solutions de (H) est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
•Si $\Delta = 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet une racine double réelle $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
L'ensemble des solutions de (H) est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rot} \mid (\lambda, \mu)) \in \mathbb{R}^2\}$.
•Si $\Delta < 0$ alors $(\mathcal{C})$ admet deux racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm i\beta$.
L'ensemble des solutions de (H) est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t) \mid (\lambda, \mu)) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{y : t \mapsto Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta)$ où $(A, \theta) \in \mathbf{R}^2$.

Preuve Si r est solution de l'équation, $\mathcal{C}$, $ax^2 + bx + c = 0$ alors on pose $z = ye^{-rt} \Leftrightarrow y = ze^{rt}$
$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow az'' + (2ar + b)z' = 0$
Si $\Delta = 0$ alors $2ar + b = 0$ et $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow z'' = 0$ d'où $z = \lambda t + \mu$ et donc $y = (\lambda t + \mu)e^{rt}$
Si $\Delta \neq 0$ alors, en posant $Z = z'$, on a $aZ' + (2ar + b)Z = 0$ d'où $Z = Ke^{-(a+2r)t}$ puis
$z = \dfrac{K}{-(a + 2r)}e^{-(a+2r)t} + \mu$ et $y = \lambda e^{-(a+r)t} + \mu e^{rx}$
Or si r_1 est solution de l'équation, $\mathcal{C}$, $ax^2 + bx + c = 0$ alors l'autre solution est $r_2 = -(a + r_1)$ et $y = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
si r_1 et r_2 sont complexes ($r = \alpha \pm i\beta$) alors on peut écrire $y = e^{\alpha t}(\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)$.

2. Cas des équations avec certains seconds membres particuliers

Pour la recherche d'une solution particulière de l'équation (E) : $ay'' + by' + cy = f(t)$
dans le cas où $f(t) = e^{mt}P(t)$ où $m \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.
On cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $y_p(t) = t^\alpha Q(t)e^{mt}$
où α est la multiplicité de m dans l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$: $ax^2 + bx + c = 0$
($\alpha = 0$ si m n'est pas racine, $\alpha = 1$ si m est racine simple, $\alpha = 2$ si m est racine double)
et $Q \in \mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg Q = \deg P$.

Exercice 11 (1) $y'' - 3y' + 2y = 6$ (2) $y'' - 2y = t^2 + t - 1$
(3) $y'' - 2y' = 2t + 1$ (4) $y'' - 4y' + 4y = (t + 1)e^{2t}$

dans le cas où $f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ où $A,\ B$ et ω sont des constantes réelles.
On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = t^\alpha(\lambda\sin(\omega t) + \mu\cos(\omega t))$
où α est la multiplicité de $i\omega$ dans l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$
λ et μ sont des constantes réelles à déterminer.

VI Complément : équations différentielles à coefficients non constants

Les équations différentielles non linéaires sont hors programme mais il faut savoir utiliser les indications.
Soit (E) une équation différentielle de fonction inconnue y de la variable réelle t.

1. Changement de fonction inconnue

Si on propose un changement de fonction inconnue : $z = \varphi(y)$
φ doit être bijective et on cherche φ^{-1} pour pouvoir écrire $y = \varphi^{-1}(z)$.
On calcule les dérivées successives de y en fonction de celles de z et on trouve l'équation différentielle (E') telle que : y solution de $(E) \Leftrightarrow z$ solution de (E').
On résout l'équation (E') puis on conclut en explicitant $y = \varphi^{-1}(z)$.

Exercice 12 résoudre (E) : $t^2y'' + 4ty' - (t^2 - 2)y = 0$ en posant le changement de fonction $z = t^2y$

2. Changement de variable

Si on propose un changement de variable : $t = \varphi(x)$ alors on pose le changement de fonction $z(x) = y(\varphi(x))$.
Comme ci-dessus, on calcule les dérivées de la fonction $t \mapsto y(t)$ en fonction des dérivées de la fonction $x \mapsto z(x)$ et on trouve l'équation différentielle (E') telle que y solution de $(E) \Leftrightarrow z$ solution de (E').
On résout l'équation (E') puis on conclut en retrouvant $y(t) = z(\varphi^{-1}(t))$.

Exercice 13 Soit l'équation (E) : $t^2y'' - (a + b - 1)ty' + aby = 0$ où a et b sont des constantes réelles données.
Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $t = e^x$.

Remarque De la même manière, dans le cas d'une équation différentielle (E) non linéaire, on effectue le changement de fonction inconnue ou le changement de variable proposé pour aboutir à une équation différentielle (E') linéaire équivalente à (E).

Exercice 14 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) : $ty' - y + (t^2 - 2t)\sqrt{y} = 0$.
On pourra diviser par $\sqrt{y}$ et poser $z = \sqrt{y}$.