DM 1 : Complexes - Fonctions

Exercice 1 : Complexes

Soit $\theta \in [0;\pi[$. Le but de cet exercice est de déterminer la forme exponentielle du nombre complexe suivant :

$$z = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{\sqrt{1+\sin(2\theta)} + i\sqrt{1-\sin(2\theta)}}$$

On pose :

$$u = 1+\cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad v = \sqrt{1+\sin(2\theta)} + i\sqrt{1-\sin(2\theta)}$$

1. (a) Écrire une fonction `module(a,b)` qui prend en argument deux flottants et qui renvoie le module du nombre complexe $a+ib$.
   (b) Écrire une fonction `moduleZ(theta)` qui prend en argument un réel $\theta \in [0,\pi[$ et qui renvoie le module de z.
2. Justifier que v et z sont bien définis.
3. Écrire u sous forme exponentielle. *On pourra factoriser u par $e^{i\frac{\theta}{2}}$.*
4. (a) Montrer que : $1+\sin(2\theta) = (\sin\theta+\cos\theta)^2$. Obtenir une formule similaire pour $1-\sin(2\theta)$.
   (b) Trouver $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\sin\theta + \cos\theta = r\cos(\theta-\varphi) \quad \text{et} \quad \sin\theta - \cos\theta = r\sin(\theta-\varphi).$$
   (c) Établir le tableau de signe de $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ pour $x \in [0;\pi[$.
   (d) Utiliser les questions précédentes pour écrire v sous forme exponentielle.
   On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $\theta \in [0;\pi[$.
5. En déduire une écriture de z sous forme exponentielle.

Exercice 2 : Étude de fonction

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D} =]-1,1[$.
2. Montrer que f est impaire. Dans la suite, on étudie f sur $[0,1[$.
3. (a) Justifier que f est continue sur $[0,1[$.
   (b) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité au point 1 en posant $f(1)=0$.
   On pourra poser $x = 1-h$ avec $h>0$. On note encore f le prolongement ainsi obtenu.
4. (a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathscr{D}$ et déterminer f'.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire pour la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point ?
5. On considère la fonction g définie sur $]0,1[$ par :
   $$g(x) = \frac{f'(x)}{2x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}.$$
   (a) Étudier les variations de la fonction g sur $]0,1[$.
   (b) Justifier l'existence d'un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $g(a)=0$.
   (c) En déduire le signe de g et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,1]$.
6. En utilisant un développement limité à l'ordre 3 en 0, déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 et préciser la position locale de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente.
7. (a) Montrer que $f(a) = a - \dfrac{1}{a}$.
   (b) Tracer $\mathscr{C}_f$ en utilisant toutes les informations trouvées dans les questions précédentes.
   On donne $a \simeq 0,6$.